

Комбинаторика

Иван Сергеевич Казменко

Санкт-Петербургский Государственный Университет

Четверг, 24 февраля 2022 года

Содержание

- 1 Комбинаторика
 - Перестановки
 - Сочетания
 - Разбиения на три группы
 - Беспорядки
 - Циклы в перестановках
 - Рекорды в перестановках
 - Разбиения на слагаемые
 - Правильные скобочные последовательности
 - Два типа скобок

Содержание

1 Комбинаторика

- **Перестановки**
- Сочетания
- Разбиения на три группы
- Беспорядки
- Циклы в перестановках
- Рекорды в перестановках
- Разбиения на слагаемые
- Правильные скобочные последовательности
- Два типа скобок

Перестановки

Сколько способов расставить n объектов на n позициях?

Перестановки

Сколько способов расставить n объектов на n позициях?

Пример для $n = 3$: ответ равен 6.

- 1, 2, 3
- 1, 3, 2
- 2, 1, 3
- 2, 3, 1
- 3, 1, 2
- 3, 2, 1

Перестановки

Сколько способов расставить n объектов на n позициях?

- Итеративное решение:
- $n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$

Перестановки

Сколько способов расставить n объектов на n позициях?

- Решение через подзадачи:
- $n! = n \cdot (n - 1)!$

Содержание

1 Комбинаторика

- Перестановки
- **Сочетания**
- Разбиения на три группы
- Беспорядки
- Циклы в перестановках
- Рекорды в перестановках
- Разбиения на слагаемые
- Правильные скобочные последовательности
- Два типа скобок

Сочетания

Сколько способов выбрать k различных объектов из n ?

Способы, отличающиеся порядком, считаются одинаковыми.

Сочетания

Сколько способов выбрать k различных объектов из n ?

Способы, отличающиеся порядком, считаются одинаковыми.

Пример для $n = 4$ и $k = 2$: ответ равен 6.

- 1, 2
- 1, 3
- 1, 4
- 2, 3
- 2, 4
- 3, 4

Сочетания

Сколько способов выбрать k различных объектов из n ?

Способы, отличающиеся порядком, считаются одинаковыми.

- Биномиальный коэффициент:

- $$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

- Пример вывода: $C_n^k = A_n^k / k!$, где

- $A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ — количество размещений, то есть способов выбрать k объектов из n с учётом порядка.

Сочетания

Сколько способов выбрать k различных объектов из n ?

Способы, отличающиеся порядком, считаются одинаковыми.

Другая формула:

- Рассмотрим последний элемент.
- Мы либо выбрали его, либо нет.
- Переходим к подзадаче.
- $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

Содержание

- 1 Комбинаторика
 - Перестановки
 - Сочетания
 - Разбиения на три группы
 - Беспорядки
 - Циклы в перестановках
 - Рекорды в перестановках
 - Разбиения на слагаемые
 - Правильные скобочные последовательности
 - Два типа скобок

Разбиения на три группы

Сколько способов разбить n объектов на три группы: в первой a элементов, во второй b , в третьей c ?

Разбиения на три группы

Сколько способов разбить n объектов на три группы: в первой a элементов, во второй b , в третьей c ?

- Гарантируется, что $a + b + c = n$.
- Группы пронумерованы.
- Способы считаются различными, если какой-то элемент оказался в разных группах.

Разбиения на три группы

Сколько способов разбить n объектов на три группы: в первой a элементов, во второй b , в третьей c ?

Пример для $n = 4$, $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$: ответ равен 12.

- 1, 23, 4
- 1, 24, 3
- 1, 34, 2
- 2, 13, 4
- 2, 14, 3
- 2, 34, 1
- 3, 12, 4
- 3, 14, 2
- 3, 24, 1
- 4, 12, 3
- 4, 13, 2
- 4, 23, 1

Разбиения на три группы

Сколько способов разбить n объектов на три группы: в первой a элементов, во второй b , в третьей c ?

Решение через подзадачи:

- Рассмотрим последний элемент.
- Мы либо определили его в первую группу, либо во вторую, либо в третью.
- Переходим к подзадаче.
- $f(a, b, c) = f(a - 1, b, c) + f(a, b - 1, c) + f(a, b, c - 1)$

Разбиения на три группы

Сколько способов разбить n объектов на три группы: в первой a элементов, во второй b , в третьей c ?

Другое решение:

- Рассмотрим перестановку из n элементов.
- Первые a элементов определим в первую группу, следующие b элементов — во вторую, а оставшиеся c элементов — в третью.
- Порядок внутри каждой группы не важен, поэтому поделим $n!$ на факториалы размеров групп.
- $f(a, b, c) = \binom{a+b+c}{a \quad b \quad c} = \frac{(a+b+c)!}{a! \cdot b! \cdot c!}$
- Это полиномиальный (мультиномиальный) коэффициент.

Это решение обобщается на любое количество групп.

Содержание

1 Комбинаторика

- Перестановки
- Сочетания
- Разбиения на три группы
- **Беспорядки**
- Циклы в перестановках
- Рекорды в перестановках
- Разбиения на слагаемые
- Правильные скобочные последовательности
- Два типа скобок

Беспорядки

Беспорядок — это перестановка, в которой ни один элемент не находится на своём месте.

Беспорядки

Беспорядок — это перестановка, в которой ни один элемент не находится на своём месте.

Пример для $n = 4$: ответ равен 9.

- 2, 1, 4, 3
- 2, 3, 4, 1
- 2, 4, 1, 3
- 3, 1, 4, 2
- 3, 4, 1, 2
- 3, 4, 2, 1
- 4, 1, 2, 3
- 4, 3, 1, 2
- 4, 3, 2, 1

Беспорядки

Беспорядок — это перестановка, в которой ни один элемент не находится на своём месте.

Обобщим задачу:

- Пусть $f(n, k)$ — количество перестановок длины n , в которых k элементов находятся на местах.
- Рассмотрим элемент n . На какой он позиции?

Беспорядки

Беспорядок — это перестановка, в которой ни один элемент не находится на своём месте.

Обобщим задачу:

- Пусть $f(n, k)$ — количество перестановок длины n , в которых k элементов находятся на местах.
- Рассмотрим элемент n . На какой он позиции?
- На позиции n : он на своём месте.
- На позиции $i < n$: возьмём перестановку длины $n - 1$ и переставим i -й элемент на позицию n .
- Если он был на месте (k случаев), то всего на месте было $k + 1$ элементов.
- Если он был не на месте ($n - k - 1$ случай), то всего на месте было k элементов.

Беспорядки

Беспорядок — это перестановка, в которой ни один элемент не находится на своём месте.

Обобщим задачу:

- Пусть $f(n, k)$ — количество перестановок длины n , в которых k элементов находятся на местах.
- Рассмотрим элемент n . На какой он позиции?
- На позиции n : он на своём месте.
- На позиции $i < n$: возьмём перестановку длины $n - 1$ и переставим i -й элемент на позицию n .
- Если он был на месте (k случаев), то всего на месте было $k + 1$ элементов.
- Если он был не на месте ($n - k - 1$ случай), то всего на месте было k элементов.
- $f(n, k) = f(n - 1, k - 1) + k \cdot f(n - 1, k + 1) + (n - k - 1) \cdot f(n - 1, k)$

Беспорядки

Беспорядок — это перестановка, в которой ни один элемент не находится на своём месте.

Решение без обобщения:

- Рассмотрим беспорядок p_1, p_2, \dots, p_n .
- Для каждой позиции есть $n - 1$ подходящее число.
- Пусть $i = p_n$. Известно, что $i < n$. Чему равно p_i ?

Беспорядки

Беспорядок — это перестановка, в которой ни один элемент не находится на своём месте.

Решение без обобщения:

- Рассмотрим беспорядок p_1, p_2, \dots, p_n .
- Для каждой позиции есть $n - 1$ подходящее число.
- Пусть $i = p_n$. Известно, что $i < n$. Чему равно p_i ?
- Если $p_i = n$, то переходим к подзадаче для $n - 2$ элементов: для каждой из $n - 2$ оставшихся позиций есть $n - 3$ подходящих чисел.
- Если $p_i \neq n$, то переходим к подзадаче для $n - 1$ элемента: для позиции i не подходят числа i и n , и для каждой из $n - 1$ оставшихся позиций есть $n - 2$ подходящих числа.

Беспорядки

Беспорядок — это перестановка, в которой ни один элемент не находится на своём месте.

Решение без обобщения:

- Рассмотрим беспорядок p_1, p_2, \dots, p_n .
- Для каждой позиции есть $n - 1$ подходящее число.
- Пусть $i = p_n$. Известно, что $i < n$. Чему равно p_i ?
- Если $p_i = n$, то переходим к подзадаче для $n - 2$ элементов: для каждой из $n - 2$ оставшихся позиций есть $n - 3$ подходящих чисел.
- Если $p_i \neq n$, то переходим к подзадаче для $n - 1$ элемента: для позиции i не подходят числа i и n , и для каждой из $n - 1$ оставшихся позиций есть $n - 2$ подходящих числа.
- $d(n) = (n - 1) \cdot (d(n - 1) + d(n - 2))$
- В обобщённой задаче $f(n, k) = d(n - k) \cdot \binom{n}{k}$.

Содержание

1 Комбинаторика

- Перестановки
- Сочетания
- Разбиения на три группы
- Беспорядки
- **Циклы в перестановках**
- Рекорды в перестановках
- Разбиения на слагаемые
- Правильные скобочные последовательности
- Два типа скобок

Циклы в перестановках

Сколько перестановок длины n содержат ровно k циклов?

Циклы в перестановках

Сколько перестановок длины n содержат ровно k циклов?
Любая перестановка записывается в виде произведения циклов:

- 4, 1, 8, 2, 5, 7, 6, 3
- Выпишем цикл, который начинается с единицы.
- Выберем минимальное невыписанное число и выпишем цикл, который начинается с него, и так далее.
- $(1, 4, 2)(3, 8)(5)(6, 7)$

Циклы в перестановках

Сколько перестановок длины n содержат ровно k циклов?

Пример для $n = 4$ и $k = 2$: ответ равен 11.

- $(1, 2, 3)(4)$
- $(1, 2, 4)(3)$
- $(1, 3, 2)(4)$
- $(1, 3, 4)(2)$
- $(1, 4, 2)(3)$
- $(1, 4, 3)(2)$
- $(1, 2)(3, 4)$
- $(1, 3)(2, 4)$
- $(1, 4)(2, 3)$
- $(1)(2, 3, 4)$
- $(1)(2, 4, 3)$

Циклы в перестановках

Сколько перестановок длины n содержат ровно k циклов?

Решим в общем виде:

- Пусть $f(n, k)$ — количество перестановок длины n , в которых ровно k циклов.
- Рассмотрим элемент n . На какой он позиции?
- На позиции n : он образует новый цикл.
- На позиции $i < n$: возьмём перестановку длины $n - 1$ и переставим i -й элемент на позицию n .
- Число n добавилось в цикл, который содержал число i .
- Если было $p_i = j$, то стало $p_i = n$ и $p_n = j$.

Циклы в перестановках

Сколько перестановок длины n содержат ровно k циклов?

Решим в общем виде:

- Пусть $f(n, k)$ — количество перестановок длины n , в которых ровно k циклов.
- Рассмотрим элемент n . На какой он позиции?
- На позиции n : он образует новый цикл.
- На позиции $i < n$: возьмём перестановку длины $n - 1$ и переставим i -й элемент на позицию n .
- Число n добавилось в цикл, который содержал число i .
- Если было $p_i = j$, то стало $p_i = n$ и $p_n = j$.
- $f(n, k) = f(n - 1, k - 1) + (n - 1) \cdot f(n - 1, k)$

Содержание

1 Комбинаторика

- Перестановки
- Сочетания
- Разбиения на три группы
- Беспорядки
- Циклы в перестановках
- **Рекорды в перестановках**
- Разбиения на слагаемые
- Правильные скобочные последовательности
- Два типа скобок

Рекорды в перестановках

Сколько перестановок длины n содержат ровно k рекордов?

Рекорды в перестановках

Сколько перестановок длины n содержат ровно k рекордов?

Рекорд — число, которое больше всех чисел левее него.

- 4, 1, 7, 2, 8, 5, 6, 3
- Рекорды: 4, 7, 8.

Рекорды в перестановках

Сколько перестановок длины n содержат ровно k рекордов?

Пример для $n = 4$ и $k = 2$: ответ равен 11.

- 1, 4, 2, 3
- 1, 4, 3, 2
- 2, 1, 4, 3
- 2, 4, 1, 3
- 2, 4, 3, 1
- 3, 1, 2, 4
- 3, 1, 4, 2
- 3, 2, 1, 4
- 3, 2, 4, 1
- 3, 4, 1, 2
- 3, 4, 2, 1

Рекорды в перестановках

Сколько перестановок длины n содержат ровно k рекордов?

Решим в общем виде:

- Пусть $f(n, k)$ — количество перестановок длины n , в которых ровно k рекордов.
- Рассмотрим элемент 1. На какой он позиции?
- На позиции 1: он является рекордом.
- На позиции $i > 1$: он не является рекордом.
- Осталась перестановка чисел $2, 3, \dots, n$, в которой $k - 1$ рекорд.

Рекорды в перестановках

Сколько перестановок длины n содержат ровно k рекордов?

Решим в общем виде:

- Пусть $f(n, k)$ — количество перестановок длины n , в которых ровно k рекордов.
- Рассмотрим элемент 1. На какой он позиции?
- На позиции 1: он является рекордом.
- На позиции $i > 1$: он не является рекордом.
- Осталась перестановка чисел $2, 3, \dots, n$, в которой $k - 1$ рекорд.
- $f(n, k) = f(n - 1, k - 1) + (n - 1) \cdot f(n - 1, k)$
- Получилась та же формула, что и для количества перестановок длины n с k циклами!

Содержание

- 1 Комбинаторика
 - Перестановки
 - Сочетания
 - Разбиения на три группы
 - Беспорядки
 - Циклы в перестановках
 - Рекорды в перестановках
 - **Разбиения на слагаемые**
 - Правильные скобочные последовательности
 - Два типа скобок

Разбиения на слагаемые

Сколько способов разбить число n на слагаемые?

Разбиения на слагаемые

Сколько способов разбить число n на слагаемые?

- Слагаемые — положительные целые числа.
- Способы, отличающиеся порядком слагаемых, считаются одинаковыми.

Разбиения на слагаемые

Сколько способов разбить число n на слагаемые?

Пример для $n = 5$: ответ равен 7.

- $5 = 5$
- $5 = 4 + 1$
- $5 = 3 + 2$
- $5 = 3 + 1 + 1$
- $5 = 2 + 2 + 1$
- $5 = 2 + 1 + 1 + 1$
- $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

Поскольку порядок не важен, будем записывать слагаемые упорядоченными.

Разбиения на слагаемые

Сколько способов разбить число n на слагаемые?

Обобщение: $f(n, k)$ – количество разбиений n на слагаемые не больше k .

- Рассмотрим максимальный элемент разбиения.
- Если он равен k , то без него переходим к подзадаче:
 $f(n - k, k)$.
- Если он меньше k , то сразу переходим к подзадаче:
 $f(n, k - 1)$.
- $f(n, k) = f(n, k - 1) + f(n - k, k)$

Разбиения на слагаемые

Сколько способов разбить число n на слагаемые?

Обобщение: $g(n, k)$ – количество разбиений n ровно на k слагаемых.

- Рассмотрим минимальное слагаемое.
- Если оно равно единице, то без него переходим к подзадаче: $g(n - 1, k - 1)$.
- Если оно больше единицы, то переходим к подзадаче, где все слагаемые на единицу меньше: $g(n - k, k)$.
- Разбиение строится последовательностью действий:
 - (Д) добавить слагаемое, равное единице
 - (У) увеличить все добавленные слагаемые на единицу
- Например, разбиение $13 = 5 + 3 + 3 + 2$ строится последовательностью «ДУУД₁ДУДУ».

Разбиения на слагаемые

Сколько способов разбить число n на слагаемые?

Обобщение: $g(n, k)$ – количество разбиений n ровно на k слагаемых.

- Рассмотрим минимальное слагаемое.
- Если оно равно единице, то без него переходим к подзадаче: $g(n - 1, k - 1)$.
- Если оно больше единицы, то переходим к подзадаче, где все слагаемые на единицу меньше: $g(n - k, k)$.
- Разбиение строится последовательностью действий:
 - (Д) добавить слагаемое, равное единице
 - (У) увеличить все добавленные слагаемые на единицу
- Например, разбиение $13 = 5 + 3 + 3 + 2$ строится последовательностью «ДУУД₁Д₂УД₃У».
- $g(n, k) = g(n - 1, k - 1) + g(n - k, k)$

Содержание

- 1 Комбинаторика
 - Перестановки
 - Сочетания
 - Разбиения на три группы
 - Беспорядки
 - Циклы в перестановках
 - Рекорды в перестановках
 - Разбиения на слагаемые
 - **Правильные скобочные последовательности**
 - Два типа скобок

Правильные скобочные последовательности

Сколько правильных скобочных последовательностей из n пар скобок?

Правильные скобочные последовательности

Сколько правильных скобочных последовательностей из n пар скобок?

Множество S правильных скобочных последовательностей (ПСП) можно определить рекурсивно.

- $\varepsilon \in S$ (пустая строка)
- $u \in S \Rightarrow (u) \in S$
- $u, v \in S \Rightarrow uv \in S$ (конкатенация строк)

Правильные скобочные последовательности

Сколько ПСП из n пар скобок?

Пример для $n = 3$: ответ равен 5.

- $((()))$
- $((())())$
- $(())(())$
- $(())(())$
- $(())(())$

Правильные скобочные последовательности

Сколько ПСП из n пар скобок?

Обобщение: $s(a, b)$ – количество суффиксов правильной скобочной последовательности, в которых a открывающих скобок и b закрывающих скобок.

Пример для $a = 2$ и $b = 4$: ответ равен 9.

- (())))
- () ()))
- ()) ())
- ())) ()
-) (()))
-) () ())
-) ()) ()
-)) (())
-)) () ()

Правильные скобочные последовательности

Сколько ПСП из n пар скобок?

Обобщение: $s(a, b)$ – количество суффиксов правильной скобочной последовательности, в которых a открывающих скобок и b закрывающих скобок.

- $s(a, b) = 0$ при $a > b$: если открывающих скобок больше, чем закрывающих, из них не получится суффикс правильной скобочной последовательности.
- В остальных случаях рассмотрим первый символ суффикса.

Правильные скобочные последовательности

Сколько ПСП из n пар скобок?

Обобщение: $s(a, b)$ – количество суффиксов правильной скобочной последовательности, в которых a открывающих скобок и b закрывающих скобок.

- $s(a, b) = 0$ при $a > b$: если открывающих скобок больше, чем закрывающих, из них не получится суффикс правильной скобочной последовательности.
- В остальных случаях рассмотрим первый символ суффикса.
- Если это «(», переходим к подзадаче $s(a - 1, b)$.
- Если это «)», переходим к подзадаче $s(a, b - 1)$.

Правильные скобочные последовательности

Сколько ПСП из n пар скобок?

Обобщение: $s(a, b)$ – количество суффиксов правильной скобочной последовательности, в которых a открывающих скобок и b закрывающих скобок.

- $s(a, b) = 0$ при $a > b$: если открывающих скобок больше, чем закрывающих, из них не получится суффикс правильной скобочной последовательности.
- В остальных случаях рассмотрим первый символ суффикса.
- Если это «(», переходим к подзадаче $s(a - 1, b)$.
- Если это «)», переходим к подзадаче $s(a, b - 1)$.
- $s(a, b) = s(a - 1, b) + s(a, b - 1)$

Правильные скобочные последовательности

Сколько ПСП из n пар скобок?

Решение без обобщения: $s(n)$ — количество правильных скобочных последовательностей из n пар скобок.

- Рассмотрим первую скобку и парную к ней.
- Между этими скобками — любая правильная скобочная последовательность, пусть в ней k пар скобок.
- Справа от этих скобок — любая правильная скобочная последовательность, в которой $n - k - 1$ пара скобок.

Правильные скобочные последовательности

Сколько ПСП из n пар скобок?

Решение без обобщения: $s(n)$ — количество правильных скобочных последовательностей из n пар скобок.

- Рассмотрим первую скобку и парную к ней.
- Между этими скобками — любая правильная скобочная последовательность, пусть в ней k пар скобок.
- Справа от этих скобок — любая правильная скобочная последовательность, в которой $n - k - 1$ пара скобок.
- Например, для $n = 4$:
 - $() \dots \dots$, $1 \cdot 5 = 5$ вариантов
 - $(\dots) \dots$, $1 \cdot 2 = 2$ варианта
 - $(\dots) \dots$, $2 \cdot 1 = 2$ варианта
 - $(\dots \dots)$, $5 \cdot 1 = 5$ вариантов

Правильные скобочные последовательности

Сколько ПСП из n пар скобок?

Решение без обобщения: $s(n)$ — количество правильных скобочных последовательностей из n пар скобок.

- Рассмотрим первую скобку и парную к ней.
- Между этими скобками — любая правильная скобочная последовательность, пусть в ней k пар скобок.
- Справа от этих скобок — любая правильная скобочная последовательность, в которой $n - k - 1$ пара скобок.
- Например, для $n = 4$:
- $() \dots \dots$, $1 \cdot 5 = 5$ вариантов
- $(\dots) \dots \dots$, $1 \cdot 2 = 2$ варианта
- $(\dots \dots) \dots$, $2 \cdot 1 = 2$ варианта
- $(\dots \dots \dots)$, $5 \cdot 1 = 5$ вариантов

- $$s(n) = \sum_{k=0}^{n-1} s(k) \cdot s(n - k - 1)$$

Содержание

1 Комбинаторика

- Перестановки
- Сочетания
- Разбиения на три группы
- Беспорядки
- Циклы в перестановках
- Рекорды в перестановках
- Разбиения на слагаемые
- Правильные скобочные последовательности
- Два типа скобок

Два типа скобок

Сколько правильных скобочных последовательностей из n пар скобок, если можно использовать скобки двух типов?

Два типа скобок

Сколько правильных скобочных последовательностей из n пар скобок, если можно использовать скобки двух типов?

Множество T правильных скобочных последовательностей из двух типов скобок (ПСП2) можно определить рекурсивно.

- $\varepsilon \in T$ (пустая строка)
- $u \in T \Rightarrow (u) \in T$
- $u \in T \Rightarrow [u] \in T$
- $u, v \in T \Rightarrow uv \in T$ (конкатенация строк)

Два типа скобок

Сколько ПСП2 из n пар скобок?

Пример для $n = 2$: ответ равен 8.

- $(())$
- $()()$
- $()[]$
- $([])$
- $[()]$
- $[][]$
- $[]()$
- $][]()$

Два типа скобок

Сколько ПСП2 из n пар скобок?

Обобщение: $t(a, b)$ – количество суффиксов правильной скобочной последовательности из двух типов скобок, в которых a открывающих скобок и b закрывающих скобок.

Идея: давайте фиксировать тип скобки, когда она открывается. Тогда в момент открытия скобки есть два варианта, какую открыть: «(» и «[». А когда скобка закрывается, она соответствует какой-то открытой скобке, и её тип однозначно определён.

Два типа скобок

Сколько ПСП2 из n пар скобок?

Обобщение: $t(a, b)$ – количество суффиксов правильной скобочной последовательности из двух типов скобок, в которых a открывающих скобок и b закрывающих скобок.

Пример для $a = 1$ и $b = 3$: ответ равен 6.

- $()\}\}$
- $[\]\}\}$
- $\}()\}$
- $\}[\]\}$
- $\}\}\()$
- $\}\}\{[\]$

Символом « $\}$ » обозначены скобки, тип которых однозначно определён соответствующими им открывающими скобками.

Два типа скобок

Сколько ПСП2 из n пар скобок?

Обобщение: $t(a, b)$ – количество суффиксов правильной скобочной последовательности из двух типов скобок, в которых a открывающих скобок и b закрывающих скобок.

- $t(a, b) = 0$ при $a > b$: если открывающих скобок больше, чем закрывающих, из них не получится суффикс правильной скобочной последовательности.
- В остальных случаях рассмотрим первый символ суффикса.

Два типа скобок

Сколько ПСП2 из n пар скобок?

Обобщение: $t(a, b)$ – количество суффиксов правильной скобочной последовательности из двух типов скобок, в которых a открывающих скобок и b закрывающих скобок.

- $t(a, b) = 0$ при $a > b$: если открывающих скобок больше, чем закрывающих, из них не получится суффикс правильной скобочной последовательности.
- В остальных случаях рассмотрим первый символ суффикса.
- Если это «(», переходим к подзадаче $t(a - 1, b)$.
- Если это «[», переходим к подзадаче $t(a - 1, b)$.
- Если это закрывающая скобка, её тип однозначно определён, и мы переходим к подзадаче $t(a, b - 1)$.

Два типа скобок

Сколько ПСП2 из n пар скобок?

Обобщение: $t(a, b)$ – количество суффиксов правильной скобочной последовательности из двух типов скобок, в которых a открывающих скобок и b закрывающих скобок.

- $t(a, b) = 0$ при $a > b$: если открывающих скобок больше, чем закрывающих, из них не получится суффикс правильной скобочной последовательности.
- В остальных случаях рассмотрим первый символ суффикса.
- Если это «(», переходим к подзадаче $t(a - 1, b)$.
- Если это «[», переходим к подзадаче $t(a - 1, b)$.
- Если это закрывающая скобка, её тип однозначно определён, и мы переходим к подзадаче $t(a, b - 1)$.
- $t(a, b) = 2 \cdot t(a - 1, b) + t(a, b - 1)$

Два типа скобок

Сколько ПСП2 из n пар скобок?

Решение без обобщения: $t(n)$ – количество ПСП2 из n пар скобок.

- Рассмотрим первую скобку и парную к ней, выберем их тип.
- Между этими скобками – любая ПСП2, пусть в ней k пар скобок.
- Справа от этих скобок – любая ПСП2, в которой $n - k - 1$ пара скобок.

Два типа скобок

Сколько ПСП2 из n пар скобок?

Решение без обобщения: $t(n)$ – количество ПСП2 из n пар скобок.

- Рассмотрим первую скобку и парную к ней, выберем их тип.
- Между этими скобками – любая ПСП2, пусть в ней k пар скобок.
- Справа от этих скобок – любая ПСП2, в которой $n - k - 1$ пара скобок.
- Например, для $n = 2$:
 - $() \dots, 1 \cdot 2 = 2$ варианта
 - $[] \dots, 1 \cdot 2 = 2$ варианта
 - $(\dots), 2 \cdot 1 = 2$ варианта
 - $[\dots], 2 \cdot 1 = 2$ варианта

Два типа скобок

Сколько ПСП2 из n пар скобок?

Решение без обобщения: $t(n)$ – количество ПСП2 из n пар скобок.

- Рассмотрим первую скобку и парную к ней, выберем их тип.
- Между этими скобками – любая ПСП2, пусть в ней k пар скобок.
- Справа от этих скобок – любая ПСП2, в которой $n - k - 1$ пара скобок.
- Например, для $n = 2$:
- $() \dots, 1 \cdot 2 = 2$ варианта
- $[] \dots, 1 \cdot 2 = 2$ варианта
- $(\dots), 2 \cdot 1 = 2$ варианта
- $[\dots], 2 \cdot 1 = 2$ варианта

$$\bullet t(n) = 2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} t(k) \cdot t(n - k - 1)$$

Вопросы?

Вопросы?