Динамика по подмножествам

Иван Сергеевич Казменко

Санкт-Петербургский Государственный Университет

Вторник, 30 марта 2021 года

Содержание

Содержание

Постановка задачи

Постановка задачи:

- Рассмотрим все подмножества множества из n элементов.
- Отметим некоторые подмножества.
- Распространим отметку с каждого подмножества на все его надмножества.
- Какие подмножества теперь отмечены?

Постановка задачи

Постановка задачи:

- Рассмотрим все подмножества множества из n элементов.
- Отметим некоторые подмножества.
- Распространим отметку с каждого подмножества на все его надмножества.
- Какие подмножества теперь отмечены?

Обозначения:

- Пронумеруем элементы множества числами $0, 1, \ldots, n-1$.
- Будем записывать подмножества как строки из n двоичных цифр.
- Цифра `0` в i-м разряде означает отсутствие элемента i.
- Цифра `1` в i-м разряде означает присутствие элемента i.
- Например, при $n = 5$ множество $\{1, 3, 4\}$ будем записывать как `11010`.

Пример

Элементы с единицы:

```
4 5
2  1 2
3  1 2 3
2  1 4
3  1 3 4
2  2 4
```

Двоичные строки:

```
4 5
0011
0111
1001
1101
1010
```

```
0000: x x
0001: x x
0010: x x
0011: v v
0100: x x
0101: x x
0110: x x
0111: v v
1000: x x
1001: v v
1010: v v
1011: x v
1100: x x
1101: v v
1110: x v
1111: x v
```

Решение

Чтение входных данных:

```
 1       int n, x;
 2       cin >> n >> x;
 3       int m = 1 << n;
 4
 5       bool mark [m];
 6       fill (mark, mark + m, false);
 7       for (int i = 0; i < x; i++) {
 8           int s = 0, t, v;
 9           cin >> t;
10           for (int j = 0; j < t; j++) {
11               cin >> v;
12               s |= 1 << (v - 1);
13           }
14           mark[s] = true;
15       }
```

Решение

Наивное решение за $O(4^n)$:

```
1       for (int s = 0; s < m; s++)
2           if (mark[s])
3               for (int t = 0; t < m; t++)
4                   if ((t & s) == s)
5                       mark[t] = true;
```

Решение

Можно поменять порядок циклов:

```
1       for (int t = 0; t < m; t++)
2           for (int s = 0; s < m; s++)
3               if ((t & s) == s)
4                   if (mark[s])
5                       mark[t] = true;
```

Решение

Перебор подмножеств подмножеств за $O(3^n)$:

```
1       for (int t = 0; t < m; t++) {
2           int s = t;
3           do {
4               if (mark[s])
5                   mark[t] = true;
6               s = (s - 1) & t;
7           } while (s != t);
8       }
```

Решение

Короче, но без пустого множества:

```
1       for (int t = 0; t < m; t++)
2           for (int s = t; s > 0; s = (s - 1) & t)
3               if (mark[s])
4                   mark[t] = true;
```

Решение

Динамическое программирование за $O(2^n \cdot n)$:

```
1       for (int s = 0; s < m; s++)
2           for (int k = 0; k < n; k++)
3               if (!(s & (1 << k)))
4                   mark[s | (1 << k)] |= mark[s];
```

Решение

Можно считать с другой стороны:

```
1       for (int t = 0; t < m; t++)
2           for (int k = 0; k < n; k++)
3               if (t & (1 << k))
4                   mark[t] |= mark[t ^ (1 << k)];
```

Решение

Можно поменять порядок циклов:

```
1       for (int k = 0; k < n; k++)
2           for (int t = 0; t < m; t++)
3               if (t & (1 << k))
4                   mark[t] |= mark[t - (1 << k)];
```

Содержание

Постановка задачи

Постановка задачи:

- Рассмотрим все подмножества множества из n элементов.
- Отметим некоторые подмножества.
- Для каждого подмножества нужно вычислить, сколько его подмножеств отмечены.

Пример

Элементы с единицы:

```
4 5
2  1 2
3  1 2 3
2  1 4
3  1 3 4
2  2 4
```

Двоичные строки:

```
4 5
0011
0111
1001
1101
1010
```

```
0000: 0
0001: 0
0010: 0
0011: 1
0100: 0
0101: 0
0110: 0
0111: 2
1000: 0
1001: 1
1010: 1
1011: 3
1100: 0
1101: 2
1110: 1
1111: 5
```

Решение

Чтение входных данных:

```
 1        int n, x;
 2        cin >> n >> x;
 3        int m = 1 << n;
 4
 5        int num [m];
 6        fill (num, num + m, 0);
 7        for (int i = 0; i < x; i++) {
 8            int s = 0, t, v;
 9            cin >> t;
10            for (int j = 0; j < t; j++) {
11                cin >> v;
12                s |= 1 << (v - 1);
13            }
14            num[s] += 1;
15        }
```

Решение

Неправильное решение — почему?

```
1       for (int s = 0; s < m; s++)
2           for (int k = 0; k < n; k++)
3               if (!(s & (1 << k)))
4                   num[s | (1 << k)] += num[s];
```

Решение

Правильное решение за $O(2^n \cdot n)$:

```
1       for (int k = 0; k < n; k++)
2           for (int s = 0; s < m; s++)
3               if (!(s & (1 << k)))
4                   num[s | (1 << k)] += num[s];
```

Содержание

Постановка задачи

- Задача — распространить отметки по подмножествам.
- Будем хранить каждую отметку в одном бите.

Решение

Чтение входных данных:

```
 1       int n, x;
 2       cin >> n >> x;
 3       int upperN = max (n - 5, 0);
 4       int m = (1 << upperN);
 5
 6       vector <int> mark (m);
 7       for (int i = 0; i < x; i++) {
 8           int s = 0, t, v;
 9           cin >> t;
10           for (int j = 0; j < t; j++) {
11               cin >> v;
12               s |= 1 << (v - 1);
13           }
14           mark[s >> 5] |= 1 << (s & 31);
15       }
```

Решение

Решение за $O((2^n \cdot n)/32)$:

```
for (int s = 0; s < m; s++) {
    mark[s] |= (mark[s] & 0x55555555) << 1;
    mark[s] |= (mark[s] & 0x33333333) << 2;
    mark[s] |= (mark[s] & 0x0F0F0F0F) << 4;
    mark[s] |= (mark[s] & 0x00FF00FF) << 8;
    mark[s] |= (mark[s] & 0x0000FFFF) << 16;
    for (int k = 0; k < upperN; k++)
        if (!(s & (1 << k)))
            mark[s | (1 << k)] |= mark[s];
}
```

Решение

Пояснение:

```
2           mark[s] |= (mark[s] & 0x55555555) << 1;
```

```
w = 0x55555555 = .*.*.*.*.*.*.*.*.*.*.*.*.*.*.*.*
y = x & w      = .u.s.q.o.m.k.i.g.e.c.a.8.6.4.2.0
x              = vutsrqponmlkjihgfedcba9876543210
z = y << 1     = u.s.q.o.m.k.i.g.e.c.a.8.6.4.2.0.
```

Решение

Пояснение:

```
3           mark[s] |= (mark[s] & 0x33333333) << 2;
```

```
w = 0x33333333 = ..**..**..**..**..**..**..**..**
y = x & w      = ..ts..po..lk..hg..dc..98..54..10
x              = vutsrqponmlkjihgfedcba9876543210
z = y << 2     = ts..po..lk..hg..dc..98..54..10..
```

Решение

Пояснение:

```
4          mark[s] |= (mark[s] & 0x0F0F0F0F) << 4;
```

```
w = 0x0F0F0F0F = ....****....****....****....****
y = x & w      = ....rqpo....jihg....ba98....3210
x              = vutsrqponmlkjihgfedcba9876543210
z = y << 4     = rqpo....jihg....ba98....3210....
```

Решение

Пояснение:

```
5           mark[s] |= (mark[s] & 0x00FF00FF) << 8;
```

```
w = 0x00FF00FF = ........********........********
y = x & w      = ........nmlkjihg........76543210
x              = vutsrqponmlkjihgfedcba9876543210
z = y << 8     = nmlkjihg........76543210........
```

Решение

Пояснение:

```
6           mark[s] |= (mark[s] & 0x0000FFFF) << 16;
```

```
w = 0x0000FFFF = ................****************
y = x & w      = ................fedcba9876543210
x              = vutsrqponmlkjihgfedcba9876543210
z = y << 16    = fedcba9876543210................
```

Вопросы?

Вопросы?