Комбинаторика

Иван Сергеевич Казменко

Санкт-Петербургский Государственный Университет

Вторник, 9 марта 2021 года

Содержание

Перестановки

Сколько способов расставить n объектов на n позициях?

Перестановки

Сколько способов расставить n объектов на n позициях?

Пример для $n = 3$: ответ равен 6.

- $1, 2, 3$
- $1, 3, 2$
- $2, 1, 3$
- $2, 3, 1$
- $3, 1, 2$
- $3, 2, 1$

Перестановки

Сколько способов расставить n объектов на n позициях?

- Итеративное решение:
- $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$

Перестановки

Сколько способов расставить n объектов на n позициях?

- Решение через подзадачи:
- $n! = n \cdot (n-1)!$

Сочетания

Сколько способов выбрать k различных объектов из n?

Способы, отличающиеся порядком, считаются одинаковыми.

Сочетания

Сколько способов выбрать k различных объектов из n?
Способы, отличающиеся порядком, считаются одинаковыми.
Пример для $n = 4$ и $k = 2$: ответ равен 6.

- $1, 2$
- $1, 3$
- $1, 4$
- $2, 3$
- $2, 4$
- $3, 4$

Сочетания

Сколько способов выбрать k различных объектов из n?
Способы, отличающиеся порядком, считаются одинаковыми.

- Биномиальный коэффициент:
- $C_n^k = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
- Пример вывода: $C_n^k = A_n^k / k!$, где
- $A_n^k = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$ — количество размещений, то есть способов выбрать k объектов из n с учётом порядка.

Сочетания

Сколько способов выбрать k различных объектов из n?

Способы, отличающиеся порядком, считаются одинаковыми.

Другая формула:

- Рассмотрим последний элемент.
- Мы либо выбрали его, либо нет.
- Переходим к подзадаче.
- $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

Разбиения на три группы

Сколько способов разбить n объектов на три группы: в первой a элементов, во второй b, в третьей c?

Разбиения на три группы

Сколько способов разбить n объектов на три группы: в первой a элементов, во второй b, в третьей c?

- Гарантируется, что $a + b + c = n$.
- Группы пронумерованы.
- Способы считаются различными, если какой-то элемент оказался в разных группах.

Разбиения на три группы

Сколько способов разбить n объектов на три группы: в первой a элементов, во второй b, в третьей c?

Пример для $n = 4$, $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$: ответ равен 12.

- 1, 23, 4
- 1, 24, 3
- 1, 34, 2
- 2, 13, 4
- 2, 14, 3
- 2, 34, 1
- 3, 12, 4
- 3, 14, 2
- 3, 24, 1
- 4, 12, 3
- 4, 13, 2
- 4, 23, 1

Разбиения на три группы

Сколько способов разбить n объектов на три группы: в первой a элементов, во второй b, в третьей c?

Решение через подзадачи:

- Рассмотрим последний элемент.
- Мы либо определили его в первую группу, либо во вторую, либо в третью.
- Переходим к подзадаче.
- $f(a,b,c) = f(a-1,b,c) + f(a,b-1,c) + f(a,b,c-1)$

Разбиения на три группы

Сколько способов разбить n объектов на три группы: в первой a элементов, во второй b, в третьей c?

Другое решение:

- Рассмотрим перестановку из n элементов.
- Первые a элементов определим в первую группу, следующие b элементов — во вторую, а оставшиеся c элементов — в третью.
- Порядок внутри каждой группы не важен, поэтому поделим $n!$ на факториалы размеров групп.
- $f(a, b, c) = \binom{a+b+c}{a \quad b \quad c} = \dfrac{(a+b+c)!}{a! \cdot b! \cdot c!}$
- Это полиномиальный (мультиномиальный) коэффициент.

Это решение обобщается на любое количество групп.

Беспорядки

Беспорядок — это перестановка, в которой ни один элемент не находится на своём месте.

Беспорядки

Беспорядок — это перестановка, в которой ни один элемент не находится на своём месте.

Пример для $n = 4$: ответ равен 9.

- $2, 1, 4, 3$
- $2, 3, 4, 1$
- $2, 4, 1, 3$
- $3, 1, 4, 2$
- $3, 4, 1, 2$
- $3, 4, 2, 1$
- $4, 1, 2, 3$
- $4, 3, 1, 2$
- $4, 3, 2, 1$

Беспорядки

Беспорядок — это перестановка, в которой ни один элемент не находится на своём месте.

Обобщим задачу:

- Пусть $f(n,k)$ — количество перестановок длины n, в которых k элементов находятся на местах.
- Рассмотрим элемент n. На какой он позиции?

Беспорядки

Беспорядок — это перестановка, в которой ни один элемент не находится на своём месте.
Обобщим задачу:

- Пусть $f(n, k)$ — количество перестановок длины n, в которых k элементов находятся на местах.
- Рассмотрим элемент n. На какой он позиции?
- На позиции n: он на своём месте.
- На позиции $i < n$: возьмём перестановку длины $n - 1$ и переставим i-й элемент на позицию n.
- Если он был на месте (k случаев), то всего на месте было $k + 1$ элементов.
- Если он был не на месте ($n - k - 1$ случай), то всего на месте было k элементов.

Беспорядки

Беспорядок — это перестановка, в которой ни один элемент не находится на своём месте.

Обобщим задачу:

- Пусть $f(n,k)$ — количество перестановок длины n, в которых k элементов находятся на местах.
- Рассмотрим элемент n. На какой он позиции?
- На позиции n: он на своём месте.
- На позиции $i < n$: возьмём перестановку длины $n-1$ и переставим i-й элемент на позицию n.
- Если он был на месте (k случаев), то всего на месте было $k+1$ элементов.
- Если он был не на месте ($n-k-1$ случай), то всего на месте было k элементов.
- $f(n,k) = f(n-1,k-1) + k \cdot f(n-1,k+1) + (n-k-1) \cdot f(n-1,k)$

Беспорядки

Беспорядок — это перестановка, в которой ни один элемент не находится на своём месте.

Решение без обобщения:

- Рассмотрим беспорядок $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
- Для каждой позиции есть $n - 1$ подходящее число.
- Пусть $i = p_n$. Известно, что $i < n$. Чему равно p_i?

Беспорядки

Беспорядок — это перестановка, в которой ни один элемент не находится на своём месте.

Решение без обобщения:

- Рассмотрим беспорядок $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
- Для каждой позиции есть $n-1$ подходящее число.
- Пусть $i = p_n$. Известно, что $i < n$. Чему равно p_i?
- Если $p_i = n$, то переходим к подзадаче для $n-2$ элементов: для каждой из $n-2$ оставшихся позиций есть $n-3$ подходящих чисел.
- Если $p_i \neq n$, то переходим к подзадаче для $n-1$ элемента: для позиции i не подходят числа i и n, и для каждой из $n-1$ оставшихся позиций есть $n-2$ подходящих числа.

Беспорядки

Беспорядок — это перестановка, в которой ни один элемент не находится на своём месте.

Решение без обобщения:

- Рассмотрим беспорядок $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
- Для каждой позиции есть $n-1$ подходящее число.
- Пусть $i = p_n$. Известно, что $i < n$. Чему равно p_i?
- Если $p_i = n$, то переходим к подзадаче для $n-2$ элементов: для каждой из $n-2$ оставшихся позиций есть $n-3$ подходящих чисел.
- Если $p_i \neq n$, то переходим к подзадаче для $n-1$ элемента: для позиции i не подходят числа i и n, и для каждой из $n-1$ оставшихся позиций есть $n-2$ подходящих числа.
- $d(n) = (n-1) \cdot (d(n-1) + d(n-2))$
- В обобщённой задаче $f(n,k) = d(n-k) \cdot \binom{n}{k}$.

Циклы в перестановках

Сколько перестановок длины n содержат ровно k циклов?

Циклы в перестановках

Сколько перестановок длины n содержат ровно k циклов?
Любая перестановка записывается в виде произведения циклов:

- $4, 1, 8, 2, 5, 7, 6, 3$
- Выпишем цикл, который начинается с единицы.
- Выберем минимальное невыписанное число и выпишем цикл, который начинается с него, и так далее.
- $(1, 4, 2)(3, 8)(5)(6, 7)$

Циклы в перестановках

Сколько перестановок длины n содержат ровно k циклов?

Пример для $n = 4$ и $k = 2$: ответ равен 11.

- $(1, 2, 3)(4)$
- $(1, 2, 4)(3)$
- $(1, 3, 2)(4)$
- $(1, 3, 4)(2)$
- $(1, 4, 2)(3)$
- $(1, 4, 3)(2)$
- $(1, 2)(3, 4)$
- $(1, 3)(2, 4)$
- $(1, 4)(2, 3)$
- $(1)(2, 3, 4)$
- $(1)(2, 4, 3)$

Циклы в перестановках

Сколько перестановок длины n содержат ровно k циклов?
Решим в общем виде:

- Пусть $f(n,k)$ — количество перестановок длины n, в которых ровно k циклов.
- Рассмотрим элемент n. На какой он позиции?
- На позиции n: он образует новый цикл.
- На позиции $i < n$: возьмём перестановку длины $n-1$ и переставим i-й элемент на позицию n.
- Число n добавилось в цикл, который содержал число i.
- Если было $p_i = j$, то стало $p_i = n$ и $p_n = j$.

Циклы в перестановках

Сколько перестановок длины n содержат ровно k циклов?
Решим в общем виде:

- Пусть $f(n,k)$ — количество перестановок длины n, в которых ровно k циклов.
- Рассмотрим элемент n. На какой он позиции?
- На позиции n: он образует новый цикл.
- На позиции $i < n$: возьмём перестановку длины $n-1$ и переставим i-й элемент на позицию n.
- Число n добавилось в цикл, который содержал число i.
- Если было $p_i = j$, то стало $p_i = n$ и $p_n = j$.
- $f(n,k) = f(n-1,k-1) + (n-1) \cdot f(n-1,k)$

Рекорды в перестановках

Сколько перестановок длины n содержат ровно k рекордов?

Рекорды в перестановках

Сколько перестановок длины n содержат ровно k рекордов?
Рекорд — число, которое больше всех чисел левее него.

- $4, 1, 7, 2, 8, 5, 6, 3$
- Рекорды: 4, 7, 8.

Рекорды в перестановках

Сколько перестановок длины n содержат ровно k рекордов?
Пример для $n = 4$ и $k = 2$: ответ равен 11.

- $1, 4, 2, 3$
- $1, 4, 3, 2$
- $2, 1, 4, 3$
- $2, 4, 1, 3$
- $2, 4, 3, 1$
- $3, 1, 2, 4$
- $3, 1, 4, 2$
- $3, 2, 1, 4$
- $3, 2, 4, 1$
- $3, 4, 1, 2$
- $3, 4, 2, 1$

Рекорды в перестановках

Сколько перестановок длины n содержат ровно k рекордов?
Решим в общем виде:

- Пусть $f(n, k)$ — количество перестановок длины n, в которых ровно k рекордов.
- Рассмотрим элемент 1. На какой он позиции?
- На позиции 1: он является рекордом.
- На позиции $i > 1$: он не является рекордом.
- Осталась перестановка чисел $2, 3, \ldots, n$, в которой $k - 1$ рекорд.

Рекорды в перестановках

Сколько перестановок длины n содержат ровно k рекордов? Решим в общем виде:

- Пусть $f(n,k)$ — количество перестановок длины n, в которых ровно k рекордов.
- Рассмотрим элемент 1. На какой он позиции?
- На позиции 1: он является рекордом.
- На позиции $i > 1$: он не является рекордом.
- Осталась перестановка чисел $2, 3, \ldots, n$, в которой $k - 1$ рекорд.
- $f(n,k) = f(n-1,k-1) + (n-1) \cdot f(n-1,k)$
- Получилась та же формула, что и для количества перестановок длины n с k циклами!

Разбиения на слагаемые

Сколько способов разбить число n на слагаемые?

Разбиения на слагаемые

Сколько способов разбить число n на слагаемые?

- Слагаемые — положительные целые числа.
- Способы, отличающиеся порядком слагаемых, считаются одинаковыми.

Разбиения на слагаемые

Сколько способов разбить число n на слагаемые?
Пример для $n = 5$: ответ равен 7.

- $5 = 5$
- $5 = 4 + 1$
- $5 = 3 + 2$
- $5 = 3 + 1 + 1$
- $5 = 2 + 2 + 1$
- $5 = 2 + 1 + 1 + 1$
- $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

Поскольку порядок не важен, будем записывать слагаемые упорядоченными.

Разбиения на слагаемые

Сколько способов разбить число n на слагаемые?
Обобщение: $f(n, k)$ — количество разбиений n на слагаемые не больше k.

- Рассмотрим максимальный элемент разбиения.
- Если он равен k, то без него переходим к подзадаче: $f(n-k, k)$.
- Если он меньше k, то сразу переходим к подзадаче: $f(n, k-1)$.
- $f(n, k) = f(n, k-1) + f(n-k, k)$

Разбиения на слагаемые

Сколько способов разбить число n на слагаемые?
Обобщение: $g(n, k)$ — количество разбиений n ровно на k слагаемых.

- Рассмотрим минимальное слагаемое.
- Если оно равно единице, то без него переходим к подзадаче: $g(n-1, k-1)$.
- Если оно больше единицы, то переходим к подзадаче, где все слагаемые на единицу меньше: $g(n-k, k)$.
- Разбиение строится последовательностью действий:
  - (Д) добавить слагаемое, равное единице
  - (У) увеличить все добавленные слагаемые на единицу
- Например, разбиение $13 = 5 + 3 + 3 + 2$ строится последовательностью «ДУУДДУДУ».

Разбиения на слагаемые

Сколько способов разбить число n на слагаемые?
Обобщение: $g(n, k)$ — количество разбиений n ровно на k слагаемых.

- Рассмотрим минимальное слагаемое.
- Если оно равно единице, то без него переходим к подзадаче: $g(n-1, k-1)$.
- Если оно больше единицы, то переходим к подзадаче, где все слагаемые на единицу меньше: $g(n-k, k)$.
- Разбиение строится последовательностью действий:
  - (Д) добавить слагаемое, равное единице
  - (У) увеличить все добавленные слагаемые на единицу
- Например, разбиение $13 = 5 + 3 + 3 + 2$ строится последовательностью «ДУУДДУДУ».
- $g(n, k) = g(n-1, k-1) + g(n-k, k)$

Правильные скобочные последовательности

Сколько правильных скобочных последовательностей из n пар скобок?

Правильные скобочные последовательности

Сколько правильных скобочных последовательностей из n пар скобок?

Множество S правильных скобочных последовательностей (ПСП) можно определить рекурсивно.

- $\varepsilon \in S$ (пустая строка)
- $u \in S \Rightarrow \texttt{(}u\texttt{)} \in S$
- $u, v \in S \Rightarrow uv \in S$ (конкатенация строк)

Правильные скобочные последовательности

Сколько ПСП из n пар скобок?

Пример для $n = 3$: ответ равен 5.

- ((( )))
- (( ) ( ))
- (( )) ( )
- ( ) (( ))
- ( ) ( ) ( )

Правильные скобочные последовательности

Сколько ПСП из n пар скобок?

Обобщение: $s(a, b)$ — количество суффиксов правильной скобочной последовательности, в которых a открывающих скобок и b закрывающих скобок.

Пример для $a = 2$ и $b = 4$: ответ равен 9.

- (( ))))
- ( ) ( )))
- ( )) ( ))
- ( ))) ( )
-) (( )))
-) ( ) ( ))
-) ( )) ( )
-)) (( ))
-)) ( ) ( )

Правильные скобочные последовательности

Сколько ПСП из n пар скобок?

Обобщение: $s(a, b)$ — количество суффиксов правильной скобочной последовательности, в которых a открывающих скобок и b закрывающих скобок.

- $s(a, b) = 0$ при $a > b$: если открывающих скобок больше, чем закрывающих, из них не получится суффикс правильной скобочной последовательности.
- В остальных случаях рассмотрим первый символ суффикса.

Правильные скобочные последовательности

Сколько ПСП из n пар скобок?

Обобщение: $s(a, b)$ — количество суффиксов правильной скобочной последовательности, в которых a открывающих скобок и b закрывающих скобок.

- $s(a, b) = 0$ при $a > b$: если открывающих скобок больше, чем закрывающих, из них не получится суффикс правильной скобочной последовательности.
- В остальных случаях рассмотрим первый символ суффикса.
- Если это «`(`», переходим к подзадаче $s(a - 1, b)$.
- Если это «`)`», переходим к подзадаче $s(a, b - 1)$.

Правильные скобочные последовательности

Сколько ПСП из n пар скобок?

Обобщение: $s(a, b)$ — количество суффиксов правильной скобочной последовательности, в которых a открывающих скобок и b закрывающих скобок.

- $s(a, b) = 0$ при $a > b$: если открывающих скобок больше, чем закрывающих, из них не получится суффикс правильной скобочной последовательности.
- В остальных случаях рассмотрим первый символ суффикса.
- Если это «`(`», переходим к подзадаче $s(a - 1, b)$.
- Если это «`)`», переходим к подзадаче $s(a, b - 1)$.
- $s(a, b) = s(a - 1, b) + s(a, b - 1)$

Правильные скобочные последовательности

Сколько ПСП из n пар скобок?

Решение без обобщения: $s(n)$ — количество правильных скобочных последовательностей из n пар скобок.

- Рассмотрим первую скобку и парную к ней.
- Между этими скобками — любая правильная скобочная последовательность, пусть в ней k пар скобок.
- Справа от этих скобок — любая правильная скобочная последовательность, в которой $n - k - 1$ пара скобок.

Правильные скобочные последовательности

Сколько ПСП из n пар скобок?
Решение без обобщения: $s(n)$ — количество правильных скобочных последовательностей из n пар скобок.

- Рассмотрим первую скобку и парную к ней.
- Между этими скобками — любая правильная скобочная последовательность, пусть в ней k пар скобок.
- Справа от этих скобок — любая правильная скобочная последовательность, в которой $n - k - 1$ пара скобок.
- Например, для $n = 4$:
- `()......`, $1 \cdot 5 = 5$ вариантов
- `(..)....`, $1 \cdot 2 = 2$ варианта
- `(....)..`, $2 \cdot 1 = 2$ варианта
- `(......)`, $5 \cdot 1 = 5$ вариантов

Правильные скобочные последовательности

Сколько ПСП из n пар скобок?

Решение без обобщения: $s(n)$ — количество правильных скобочных последовательностей из n пар скобок.

- Рассмотрим первую скобку и парную к ней.
- Между этими скобками — любая правильная скобочная последовательность, пусть в ней k пар скобок.
- Справа от этих скобок — любая правильная скобочная последовательность, в которой $n - k - 1$ пара скобок.
- Например, для $n = 4$:
- `()......`, $1 \cdot 5 = 5$ вариантов
- `(..)....`, $1 \cdot 2 = 2$ варианта
- `(....)..`, $2 \cdot 1 = 2$ варианта
- `(......)`, $5 \cdot 1 = 5$ вариантов
- $s(n) = \sum_{k=0}^{n-1} s(k) \cdot s(n-k-1)$

Два типа скобок

Сколько правильных скобочных последовательностей из n пар скобок, если можно использовать скобки двух типов?

Два типа скобок

Сколько правильных скобочных последовательностей из n пар скобок, если можно использовать скобки двух типов?

Множество T правильных скобочных последовательностей из двух типов скобок (ПСП2) можно определить рекурсивно.

- $\varepsilon \in T$ (пустая строка)
- $u \in T \Rightarrow \texttt{(}u\texttt{)} \in T$
- $u \in T \Rightarrow \texttt{[}u\texttt{]} \in T$
- $u, v \in T \Rightarrow uv \in T$ (конкатенация строк)

Два типа скобок

Сколько ПСП2 из n пар скобок?

Пример для $n = 2$: ответ равен 8.

- (( ))
- ( ) ( )
- ( ) [ ]
- ([ ])
- [( )]
- [[ ])
- [ ] ( )
- [ ] ( )

Два типа скобок

Сколько ПСП2 из n пар скобок?

Обобщение: $t(a, b)$ — количество суффиксов правильной скобочной последовательности из двух типов скобок, в которых a открывающих скобок и b закрывающих скобок.

Идея: давайте фиксировать тип скобки, когда она открывается. Тогда в момент открытия скобки есть два варианта, какую открыть: «`(`» и «`[`». А когда скобка закрывается, она соответствует какой-то открытой скобке, и её тип однозначно определён.

Два типа скобок

Сколько ПСП2 из n пар скобок?
Обобщение: $t(a, b)$ — количество суффиксов правильной скобочной последовательности из двух типов скобок, в которых a открывающих скобок и b закрывающих скобок.
Пример для $a = 1$ и $b = 3$: ответ равен 6.

- ( ) } }
- [ ] } }
- } ( ) }
- } [ ] }
- } } ( )
- } } [ ]

Символом «}» обозначены скобки, тип которых однозначно определён соответствующими им открывающими скобками.

Два типа скобок

Сколько ПСП2 из n пар скобок?
Обобщение: $t(a, b)$ — количество суффиксов правильной скобочной последовательности из двух типов скобок, в которых a открывающих скобок и b закрывающих скобок.

- $t(a, b) = 0$ при $a > b$: если открывающих скобок больше, чем закрывающих, из них не получится суффикс правильной скобочной последовательности.
- В остальных случаях рассмотрим первый символ суффикса.

Два типа скобок

Сколько ПСП2 из n пар скобок?
Обобщение: $t(a, b)$ — количество суффиксов правильной скобочной последовательности из двух типов скобок, в которых a открывающих скобок и b закрывающих скобок.

- $t(a, b) = 0$ при $a > b$: если открывающих скобок больше, чем закрывающих, из них не получится суффикс правильной скобочной последовательности.
- В остальных случаях рассмотрим первый символ суффикса.
- Если это « `(` », переходим к подзадаче $t(a - 1, b)$.
- Если это « `[` », переходим к подзадаче $t(a - 1, b)$.
- Если это закрывающая скобка, её тип однозначно определён, и мы переходим к подзадаче $t(a, b - 1)$.

Два типа скобок

Сколько ПСП2 из n пар скобок?

Обобщение: $t(a, b)$ — количество суффиксов правильной скобочной последовательности из двух типов скобок, в которых a открывающих скобок и b закрывающих скобок.

- $t(a, b) = 0$ при $a > b$: если открывающих скобок больше, чем закрывающих, из них не получится суффикс правильной скобочной последовательности.
- В остальных случаях рассмотрим первый символ суффикса.
- Если это «(», переходим к подзадаче $t(a - 1, b)$.
- Если это «[», переходим к подзадаче $t(a - 1, b)$.
- Если это закрывающая скобка, её тип однозначно определён, и мы переходим к подзадаче $t(a, b - 1)$.
- $t(a, b) = 2 \cdot t(a - 1, b) + t(a, b - 1)$

Два типа скобок

Сколько ПСП2 из n пар скобок?

Решение без обобщения: $t(n)$ — количество ПСП2 из n пар скобок.

- Рассмотрим первую скобку и парную к ней, выберем их тип.
- Между этими скобками — любая ПСП2, пусть в ней k пар скобок.
- Справа от этих скобок — любая ПСП2, в которой $n - k - 1$ пара скобок.

Два типа скобок

Сколько ПСП2 из n пар скобок?

Решение без обобщения: $t(n)$ — количество ПСП2 из n пар скобок.

- Рассмотрим первую скобку и парную к ней, выберем их тип.
- Между этими скобками — любая ПСП2, пусть в ней k пар скобок.
- Справа от этих скобок — любая ПСП2, в которой $n - k - 1$ пара скобок.
- Например, для $n = 2$:
- `()..`, $1 \cdot 2 = 2$ варианта
- `[]..`, $1 \cdot 2 = 2$ варианта
- `(..)`, $2 \cdot 1 = 2$ варианта
- `[..]`, $2 \cdot 1 = 2$ варианта

Два типа скобок

Сколько ПСП2 из n пар скобок?

Решение без обобщения: $t(n)$ — количество ПСП2 из n пар скобок.

- Рассмотрим первую скобку и парную к ней, выберем их тип.
- Между этими скобками — любая ПСП2, пусть в ней k пар скобок.
- Справа от этих скобок — любая ПСП2, в которой $n-k-1$ пара скобок.
- Например, для $n = 2$:
- `()..`, $1 \cdot 2 = 2$ варианта
- `[]..`, $1 \cdot 2 = 2$ варианта
- `(..)`, $2 \cdot 1 = 2$ варианта
- `[..]`, $2 \cdot 1 = 2$ варианта
- $t(n) = 2 \cdot \sum\limits_{k=0}^{n-1} t(k) \cdot t(n-k-1)$

Вопросы?

Вопросы?