

Сайт с материалами занятий: <http://acm.math.spbu.ru/~gassa/c2022>.

Задачи без компьютера

1. Рассмотрим числа в \mathbb{Z}_m .
 - 1a. Даны $a \in \mathbb{Z}_m$ и $p \in \mathbb{N}_0$. Найдите $b = a^p$.
 - 1b. Даны $a \in \mathbb{Z}_m$ и $b \in \mathbb{Z}_m$. Найдите $p \in \mathbb{N}_0$, для которого $b = a^p$.
2. Дан прямоугольный лабиринт. Каждая клетка лабиринта либо свободна, либо занята стеной. Между свободными клетками можно перемещаться, если они имеют общую сторону. Выделены две свободные клетки: старт и финиш.
 - 2a. Найдите кратчайший путь от старта до финиша.
 - 2b. Найдите два непересекающихся пути от старта до финиша минимальной суммарной длины.
3. Дан обыкновенный граф.
 - 3a. Найдите путь, проходящий по каждому ребру ровно один раз.
 - 3b. Найдите путь, проходящий по каждой вершине ровно один раз.
4. Генератором строки S назовём строку G минимальной длины, для которой бесконечная конкатенация G^* имеет префикс S . Пример: $S = abcabca$, $G = abc$.
 - 4a. Найдите генератор заданной строки.
 - 4b. Разделите строку на две части так, чтобы суммарная длина генераторов для этих частей была минимальной.
5. Рассмотрим последовательности длины n , состоящие из целых чисел от 1 до k .
 - 5a. Сколько всего таких последовательностей?
 - 5b. Сколько всего таких последовательностей, в которых каждое число от 1 до k встречается хотя бы один раз?
6. Перестановка длины n — это последовательность длины n , в которой каждое целое число от 1 до n встречается ровно один раз.
 - 6a. Пронумеруйте все перестановки длины n целыми числами от 0 до $(n! - 1)$ в любом порядке. Опишите алгоритм получения перестановки по номеру и номера по перестановке.
 - 6b. Порядок перестановки — это минимальная положительная степень, в которую её нужно возвести, чтобы получить тождественную перестановку. Сколько различных порядков бывает у перестановок длины n ?
7. Рассмотрим плоскость \mathbb{R}^2 .
 - 7a. Заданы центры и радиусы двух окружностей. Найдите все точки их пересечения.
 - 7b. Заданы n точек. Найдите две, расстояние между которыми минимально.
8. Даны n точек общего положения на плоскости.
 - 8a. Найдите количество прямоугольных треугольников с вершинами в этих точках.
 - 8b. Найдите количество выпуклых четырёхугольников с вершинами в этих точках.