

Декартовы деревья

Борис Золотов (Б09)
Михаил Иванов (Б05, Б06)
Иван Казменко (Б01, Б02)
Владислав Макаров (Б03)
Арина Филимонова (Б10)

Санкт-Петербургский Государственный Университет

Вторник, 12 ноября 2024 года

Содержание

1 Введение

- Деревья поиска
- Декартово дерево

2 Базовые операции

- Операции
- Иллюстрации
- Операция `split`
- Операция `merge`
- Дальнейшее занятие
- Дополнительное чтение

Содержание

1 Введение

- Деревья поиска
- Декартово дерево

2 Базовые операции

- Операции
- Иллюстрации
- Операция `split`
- Операция `merge`
- Дальнейшее занятие
- Дополнительное чтение

Деревья поиска

Декартово дерево — это разновидность сбалансированного двоичного дерева поиска.

Деревья поиска

Декартово дерево — это разновидность сбалансированного двоичного дерева поиска.

- Дерево — связный граф без циклов.

Деревья поиска

Декартово дерево — это разновидность сбалансированного двоичного дерева поиска.

- Дерево — связный граф без циклов.
- Двоичное дерево — корневое дерево, в котором у каждой вершины не более двух потомков — левый и правый.

Деревья поиска

Декартово дерево — это разновидность сбалансированного двоичного дерева поиска.

- Дерево — связный граф без циклов.
- Двоичное дерево — корневое дерево, в котором у каждой вершины не более двух потомков — левый и правый.
- Дерево поиска — корневое дерево с числами в вершинах: число в вершине больше всех чисел в левом поддереве, но меньше всех чисел в правом поддереве.
 - При равенстве можно оказаться в любом поддереве.
 - Числа → любые объекты, на которых определён порядок.
 - Поиск: начать с корня, идти в правильное поддерево.

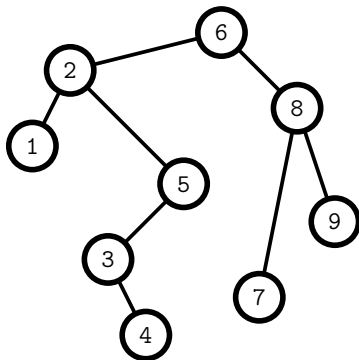
Деревья поиска

Декартово дерево — это разновидность сбалансированного двоичного дерева поиска.

- Дерево — связный граф без циклов.
- Двоичное дерево — корневое дерево, в котором у каждой вершины не более двух потомков — левый и правый.
- Дерево поиска — корневое дерево с числами в вершинах: число в вершине больше всех чисел в левом поддереве, но меньше всех чисел в правом поддереве.
 - При равенстве можно оказаться в любом поддереве.
 - Числа → любые объекты, на которых определён порядок.
 - Поиск: начать с корня, идти в правильное поддерево.
- Сбалансированное дерево — корневое дерево, в котором максимальная глубина вершины *невелика*.
 - Глубина вершины — расстояние от неё до корня.
 - Время на поиск в худшем случае — глубина дерева.

Пример

Пример:



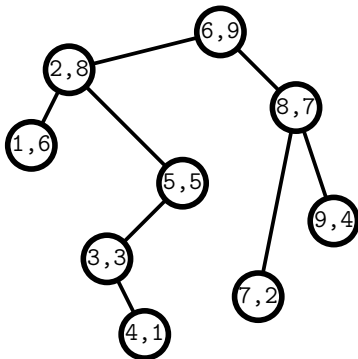
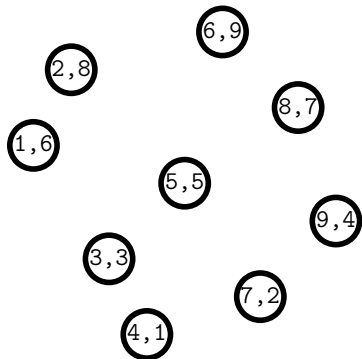
Декартово дерево

Декартово дерево — это дерево, в котором каждая вершина содержит пару чисел (x, y) :

- По координате x это двоичное дерево поиска: число в вершине больше всех чисел в левом поддереве, но меньше всех чисел в правом поддереве.
- По координате y это двоичная куча: число в вершине больше всех чисел в поддеревьях.

Удобно представлять вершины как точки (x, y) на плоскости, в декартовой системе координат.

Декартово дерево



Декартово дерево

Утверждение: если все x различны и все y различны, существует единственное декартово дерево с такими вершинами.

Декартово дерево

Утверждение: если все x различны и все y различны, существует единственное декартово дерево с такими вершинами.

- Докажем конструктивно: предъявим алгоритм построения.

Декартово дерево

Утверждение: если все x различны и все y различны, существует единственное декартово дерево с такими вершинами.

- Докажем конструктивно: предъявим алгоритм построения.
- Корень дерева — это вершина с наибольшим y .
- Все точки слева от неё образуют левое поддереву, а все точки справа — правое поддереву.
- Переходим к двум подзадачам, в которых поддеревья строятся рекурсивно тем же алгоритмом.

Выбор структуры

Почему на практике мы изучаем именно декартово дерево?

- коротко пишется
- мощное: умеет решать много интересных задач
- скорее всего, нет в стандартной библиотеке
 - C++: Policy-based data structures (GCC extension)?..

Содержание

- 1 Введение
 - Деревья поиска
 - Декартово дерево
- 2 Базовые операции
 - Операции
 - Иллюстрации
 - Операция `split`
 - Операция `merge`
 - Дальнейшее занятие
 - Дополнительное чтение

Операции

Интерфейс двоичного дерева поиска:

- `insert (t, x)` — вставить элемент `x` в дерево `t`
- `remove (t, x)` — удалить элемент `x` из дерева `t`
- `find (t, x)` — найти элемент `x` в дереве `t` (или выяснить, что его нет)

Операции

Интерфейс двоичного дерева поиска:

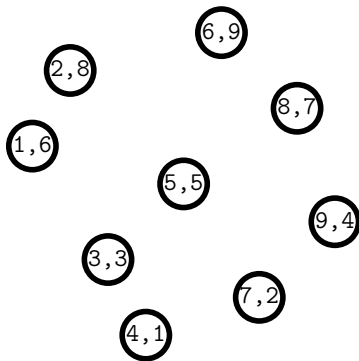
- `insert (t, x)` – вставить элемент x в дерево t
- `remove (t, x)` – удалить элемент x из дерева t
- `find (t, x)` – найти элемент x в дереве t (или выяснить, что его нет)

Базовые операции декартова дерева:

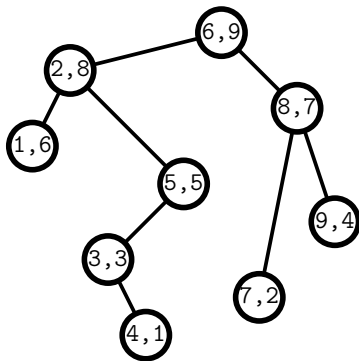
- `split (t, x)` – разбить декартово дерево на два, l и r : в одном все числа меньше x , в другом все остальные
- `merge (l, r)` – объединить два декартова дерева l и r в одно при условии, что любое число в l не больше любого числа в r

Эти операции – взаимно обратные.

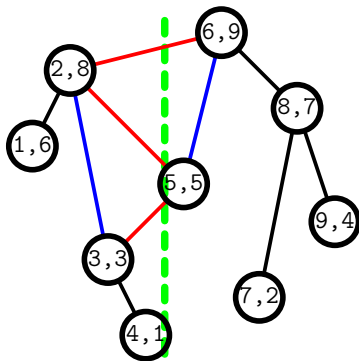
Иллюстрации 1



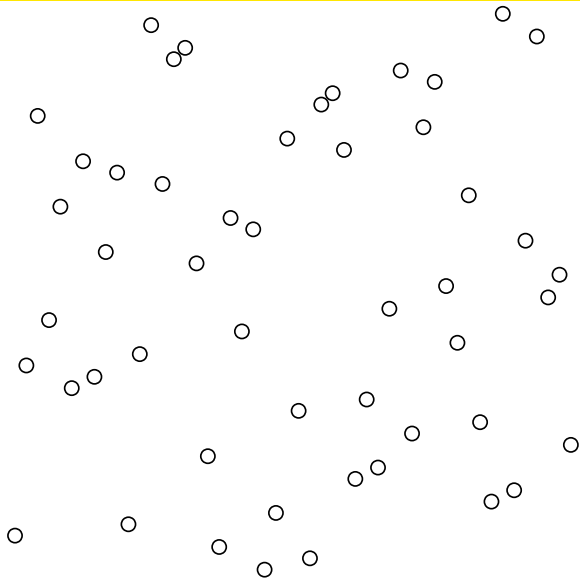
Иллюстрации 1



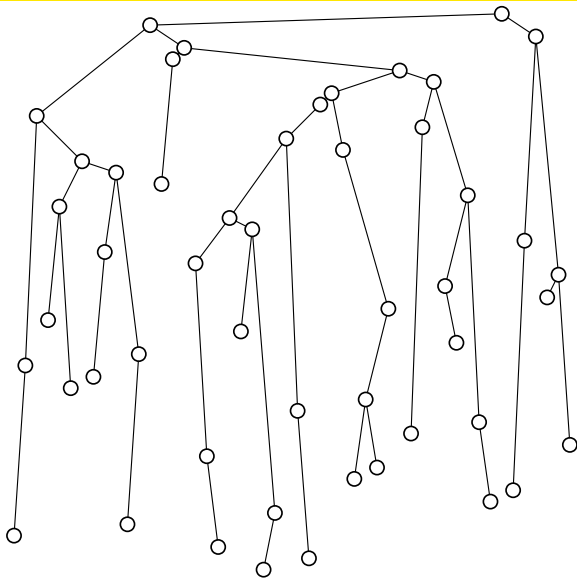
Иллюстрации 1



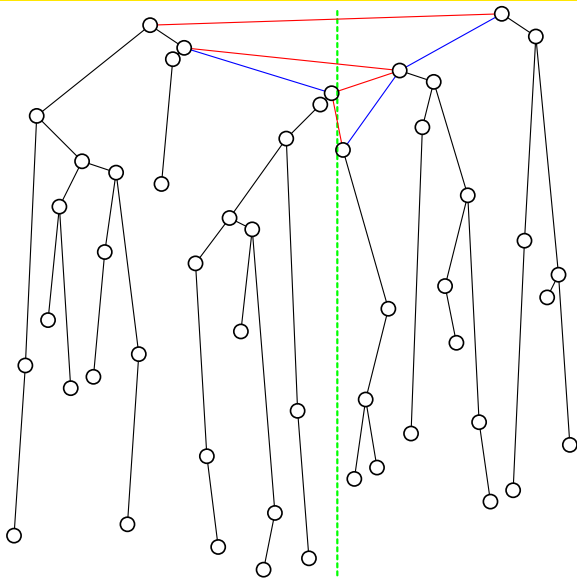
Иллюстрации 2



Иллюстрации 2



Иллюстрации 2



Операция `split`

Научимся делать `split` дерева `t` по ключу `xs`.

- Если `t` пустое, то `l` и `r` пустые.
- Если `t.x ≥ xs`, нужно разделить `t.left` по ключу `xs`.
 - Пусть мы получили `ll` и `lr`. Ответ:
 - `l = ll`,
 - `r = t`, у которого вместо `t.left` привешено дерево `lr`.
- Если же `t.x < xs`, нужно разделить `t.right` по ключу `xs`.
 - Пусть мы получили `rl` и `rr`. Ответ:
 - `l = t`, у которого вместо `t.right` привешено дерево `rl`,
 - `r = rr`.

Операция merge

Научимся делать merge деревьев l и r .

- Если l пустое, то ответ это r .
- Если r пустое, то ответ это l .
- Если $l.y > r.y$, нужно l сделать корнем.
 - Поддерево $l.left$ останется как есть.
 - Вместо поддерева $l.right$ будет merge деревьев $l.right$ и r .
- Если же $l.y \leq r.y$, нужно r сделать корнем.
 - Вместо поддерева $r.left$ будет merge деревьев l и $r.left$.
 - Поддерево $r.right$ останется как есть.

Дальнейшее занятие

План дальнейшего занятия — написать вместе программу, реализующую декартово дерево, а дальше изменять её, чтобы решить несколько примеров — сколько успеем. Например:

1. Множество: добавление, поиск, удаление.
2. Порядковая статистика: поиск k -го элемента в порядке возрастания.
3. Массив со следующей операцией: даны $l_0 < m_e < h_i$, поменять местами отрезки $[l_0, m_e)$ и $[m_e, h_i)$.
4. Максимум на отрезке $[l_0, h_i)$.
5. Переворачивание отрезка $[l_0, h_i)$.
6. Приписывание отрезка $[l_0, h_i)$ в конец массива.

Дополнительное чтение

Рекомендуемое дополнительное чтение — декартово дерево на Хабре (автор — Александр Полозов):

- <https://habr.com/ru/post/101818/>
- <https://habr.com/ru/post/102006/>
- <https://habr.com/ru/post/102364/>

Вопросы?

Вопросы?