

Вычислительная геометрия

Борис Золотов (Б06, Б09)

Иван Казменко (Б01, Б02)

Владислав Макаров (Б03, Б05)

Арина Филимонова (Б10)

Санкт-Петербургский Государственный Университет

Вторник, 15 октября 2024 года

Содержание

- 1 Точки и прямые на плоскости
 - Точки
 - Прямые
 - Прямая и точка
 - Прямая по двум точкам
 - Точка по двум прямым
 - Запись через определители
- 2 Векторы на плоскости
 - Векторы
 - Скалярное произведение
 - Косое произведение
 - Произведения и их знаки
- 3 Задачи
 - Точка и отрезок
 - Точка и луч
 - Порядок вершин треугольника
 - Выпуклость
 - Два отрезка
 - Внутренность
 - Площадь
- 4 Выпуклая оболочка
 - Задача
 - Подготовка
 - Алгоритм Джарвиса
 - Алгоритм Грэхема

Содержание

- 1 Точки и прямые на плоскости
 - Точки
 - Прямые
 - Прямая и точка
 - Прямая по двум точкам
 - Точка по двум прямым
 - Запись через определители
- 2 Векторы на плоскости
 - Векторы
 - Скалярное произведение
 - Косое произведение
 - Произведения и их знаки
- 3 Задачи
 - Точка и отрезок
 - Точка и луч
 - Порядок вершин треугольника
 - Выпуклость
 - Два отрезка
 - Внутренность
 - Площадь
- 4 Выпуклая оболочка
 - Задача
 - Подготовка
 - Алгоритм Джарвиса
 - Алгоритм Грэхема

Точки

Как задать точку на плоскости?

Точки

Как задать точку на плоскости?
Две координаты: (x, y) .

Точки

Как задать точку на плоскости?

Две координаты: (x, y) .

Можно хранить отдельно две переменные x и y .

Точки

Как задать точку на плоскости?

Две координаты: (x, y) .

Можно хранить в `pair <double, double>`.

Точки

Как задать точку на плоскости?
Две координаты: (x, y) .

```
1  #include <iostream>
2  #include <vector>
3  using namespace std;
4
5  struct Point {
6      double x, y;
7  };
8
9  int main () {
10     int n;
11     cin >> n;
12     vector <Point> p (n);
13     for (int i = 0; i < n; i++) {
14         cin >> p[i].x >> p[i].y;
15     }
16     return 0;
17 }
```

Точки: центр масс

```
1  #include <iostream>
2  #include <vector>
3  using namespace std;
4  struct Point {
5      double x, y;
6      Point () {x = y = 0;}
7      Point (double x_, double y_) : x (x_), y (y_) {}
8      Point operator + (Point const & other) const
9      {return Point (x + other.x, y + other.y);}
10     Point operator * (double c) const
11     {return Point (x * c, y * c);}
12 };
13 int main () {
14     int n;
15     cin >> n;
16     vector <Point> p (n);  auto center = Point (0, 0);
17     for (int i = 0; i < n; i++) {
18         cin >> p[i].x >> p[i].y;  center = center + p[i];
19     }
20     center = center * (1.0 / n);
21     cout << center.x << " " << center.y << endl;
22     return 0;
23 }
```

Точки: центр масс

```
1  #include <complex>
2  #include <iostream>
3  #include <vector>
4  using namespace std;
5  using Point = complex <double>;
6  int main () {
7      int n;
8      cin >> n;
9      vector <Point> p (n);
10     auto center = Point (0, 0);
11     for (int i = 0; i < n; i++) {
12         double x, y;
13         cin >> x >> y;
14         p[i].real (x);
15         p[i].imag (y);
16         center += p[i];
17     }
18     center /= n;
19     cout << center.real () << " " << center.imag () << endl;
20     return 0;
21 }
```

Прямые

Как задать прямую на плоскости?

Прямые

Как задать прямую на плоскости?

- Уравнение с угловым коэффициентом:
- $y = kx + b$
- $k = 0$ – горизонтальная прямая
- Отдельный случай: вертикальная прямая
- Если в задаче 4 прямые – то получится 16 случаев...
- Больше случаев – больше багов

Прямые

Как задать прямую на плоскости?

- Параметрическая система уравнений:

- $$\begin{cases} x = x_0 + a \cdot t \\ y = y_0 + b \cdot t \end{cases}$$

- $(a, b) \neq (0, 0)$

- $a = 0$ – вертикальная прямая

- $b = 0$ – горизонтальная прямая

- От домножения a и b на любое $k \neq 0$ прямая не меняется

- Удобно, когда прямая задана двумя точками

Прямые

Как задать прямую на плоскости?

- Однородное уравнение прямой:
- $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$
- $(a, b) \neq (0, 0)$
- $a = 0$ — горизонтальная прямая
- $b = 0$ — вертикальная прямая
- $c = 0$ — прямая проходит через начало координат
- От домножения a , b и c на любое $k \neq 0$ прямая не меняется
- Будем работать с такими уравнениями

Прямая и точка

Лежит ли заданная точка на заданной прямой?

Прямая и точка

Лежит ли заданная точка на заданной прямой?

- Точка: (x_0, y_0)
- Прямая: $ax + by + c = 0$
- Критерий: $ax_0 + by_0 + c = 0$

Прямая по двум точкам

Какая прямая проходит через две заданные точки?

Прямая по двум точкам

Какая прямая проходит через две заданные точки?

- Точки: (x_1, y_1) и (x_2, y_2)
- Прямая: $ax + by + c = 0$
- Критерий:
$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \end{cases}$$
- Вычтем: $a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$
- Подберём множители:
$$\begin{cases} a = y_2 - y_1 \\ b = x_1 - x_2 \end{cases}$$
- Теперь, чтобы вычислить c , подставим любую из двух точек: $c = -(ax_1 + by_1)$

Точка по двум прямым

В какой точке пересекаются две заданные прямые?

Точка по двум прямым

В какой точке пересекаются две заданные прямые?

- Прямые:
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$
- Домножим, чтобы сделать одно из слагаемых одинаковым

Точка по двум прямым

В какой точке пересекаются две заданные прямые?

- Прямые:
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$
- Домножим первую строку на a_2 , а вторую на a_1 :
- $$\begin{cases} a_2a_1x + a_2b_1y + a_2c_1 = 0 \\ a_1a_2x + a_1b_2y + a_1c_2 = 0 \end{cases}$$
- Вычтем: $(a_2b_1 - a_1b_2)y + (a_2c_1 - a_1c_2) = 0$
- Преобразуем: $(a_2b_1 - a_1b_2)y = -(a_2c_1 - a_1c_2)$
- Получим: $y = -\frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2}$

Точка по двум прямым

В какой точке пересекаются две заданные прямые?

- Прямые:
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$
- Домножим первую строку на b_2 , а вторую на b_1 :
- $$\begin{cases} b_2a_1x + b_2b_1y + b_2c_1 = 0 \\ b_1a_2x + b_1b_2y + b_1c_2 = 0 \end{cases}$$
- Вычтем: $(b_2a_1 - b_1a_2)x + (b_2c_1 - b_1c_2) = 0$
- Преобразуем: $(b_2a_1 - b_1a_2)x = -(b_2c_1 - b_1c_2)$
- Получим: $x = -\frac{b_2c_1 - b_1c_2}{b_2a_1 - b_1a_2}$

Точка по двум прямым

В какой точке пересекаются две заданные прямые?

- Прямые:
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$
- Ответ: $x = -\frac{b_2c_1 - b_1c_2}{b_2a_1 - b_1a_2}, y = -\frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2}$

Точка по двум прямым

В какой точке пересекаются две заданные прямые?

- Прямые:
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$
- Ответ: $x = +\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, y = -\frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$
- Особые случаи:
- Оба числителя и знаменатель равны нулю:
прямые совпадают
- Иначе, если знаменатель равен нулю:
прямые параллельны

Запись через определители

В какой точке пересекаются две заданные прямые?

- Прямые:
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$
- Через определители матриц 2×2 :
- $$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$
- $$X = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, Y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, Z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$
- $$x = +\frac{X}{Z}, y = -\frac{Y}{Z}$$

Запись через определители

В какой точке пересекаются две заданные прямые?

- Прямые:
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

- Через определитель матрицы 3×3 :

$$\begin{vmatrix} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} = r(vz - wy) - s(uz - wx) + t(uy - vx)$$

- $$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (b_1c_2 - b_2c_1)\vec{i} - (a_1c_2 - a_2c_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

- X, Y, Z — это коэффициенты при $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

- $x = +\frac{X}{Z}, y = -\frac{Y}{Z}$

Содержание

- 1 Точки и прямые на плоскости
 - Точки
 - Прямые
 - Прямая и точка
 - Прямая по двум точкам
 - Точка по двум прямым
 - Запись через определители
- 2 Векторы на плоскости
 - Векторы
 - Скалярное произведение
 - Косое произведение
 - Произведения и их знаки
- 3 Задачи
 - Точка и отрезок
 - Точка и луч
 - Порядок вершин треугольника
 - Выпуклость
 - Два отрезка
 - Внутренность
 - Площадь
- 4 Выпуклая оболочка
 - Задача
 - Подготовка
 - Алгоритм Джарвиса
 - Алгоритм Грэхема

Векторы

Как задать вектор на плоскости?

Векторы

Как задать вектор на плоскости?

Две координаты: (x, y) . Так же, как точку.

Скалярное произведение

Отложим из одной точки векторы $\vec{u} = (x_u, y_u)$ и $\vec{v} = (x_v, y_v)$.

Что можно про них узнать?

Скалярное произведение: $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v$.

Скалярное произведение

Отложим из одной точки векторы $\vec{u} = (x_u, y_u)$ и $\vec{v} = (x_v, y_v)$.

Что можно про них узнать?

Скалярное произведение: $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v$.

- Если векторы сонаправлены, $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$
- Если векторы ортогональны, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- Если векторы единичной длины, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos \alpha$
- Здесь α – угол между \vec{u} и \vec{v}

Косое произведение

Отложим из одной точки векторы $\vec{u} = (x_u, y_u)$ и $\vec{v} = (x_v, y_v)$.

Что можно про них узнать?

Косое произведение: $\vec{u} \wedge \vec{v} = x_u y_v - y_u x_v$.

Другие названия: псевдоскалярное, «векторное» (формально нет).

Через определитель: $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$.

Косое произведение

Отложим из одной точки векторы $\vec{u} = (x_u, y_u)$ и $\vec{v} = (x_v, y_v)$.

Что можно про них узнать?

Косое произведение: $\vec{u} \wedge \vec{v} = x_u y_v - y_u x_v$.

Другие названия: псевдоскалярное, «векторное» (формально нет).

Через определитель: $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$.

- Если векторы параллельны, $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$
- Если векторы ортогональны, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \pm |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$
- Если векторы единичной длины, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \sin \alpha$
- Здесь α — угол от \vec{u} до \vec{v} против часовой стрелки
- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ — ориентированная площадь параллелограмма на этих векторах

Произведения и их знаки

Отложим из одной точки векторы $\vec{u} = (x_u, y_u)$ и $\vec{v} = (x_v, y_v)$.

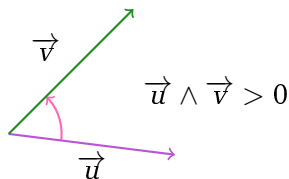
Что можно про них узнать?

Скалярное произведение: $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v$.

Косое произведение: $\vec{u} \wedge \vec{v} = x_u y_v - y_u x_v$.

В общем случае:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \alpha$
- Здесь α — угол от \vec{u} до \vec{v} против часовой стрелки



Произведения и их знаки

Отложим из одной точки векторы $\vec{u} = (x_u, y_u)$ и $\vec{v} = (x_v, y_v)$.

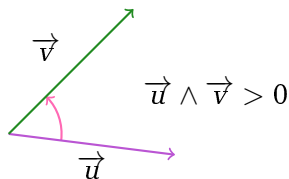
Что можно про них узнать?

Скалярное произведение: $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v$.

Косое произведение: $\vec{u} \wedge \vec{v} = x_u y_v - y_u x_v$.

В общем случае:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \alpha$
- Здесь α — угол от \vec{u} до \vec{v} против часовой стрелки



По углу:

$$0 \leq \alpha \leq \pi/2: \quad \vec{u} \cdot \vec{v} \geq 0, \quad \vec{u} \wedge \vec{v} \geq 0$$

$$\pi/2 \leq \alpha \leq \pi: \quad \vec{u} \cdot \vec{v} \leq 0, \quad \vec{u} \wedge \vec{v} \geq 0$$

$$\pi \leq \alpha \leq 3\pi/2: \quad \vec{u} \cdot \vec{v} \leq 0, \quad \vec{u} \wedge \vec{v} \leq 0$$

$$3\pi/2 \leq \alpha \leq 2\pi: \quad \vec{u} \cdot \vec{v} \geq 0, \quad \vec{u} \wedge \vec{v} \leq 0$$

Произведения и их знаки

Отложим из одной точки векторы $\vec{u} = (x_u, y_u)$ и $\vec{v} = (x_v, y_v)$.

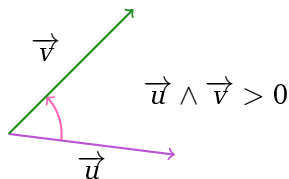
Что можно про них узнать?

Скалярное произведение: $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v$.

Косое произведение: $\vec{u} \wedge \vec{v} = x_u y_v - y_u x_v$.

В общем случае:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \alpha$
- Здесь α — угол от \vec{u} до \vec{v} против часовой стрелки



По углу:

$\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ — значит, угол между векторами острый

$\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ — значит, угол между векторами тупой

$\vec{u} \wedge \vec{v} > 0$ — значит, (\vec{u}, \vec{v}) — правая пара

$\vec{u} \wedge \vec{v} < 0$ — значит, (\vec{u}, \vec{v}) — левая пара

Произведения и их знаки

Отложим из одной точки векторы $\vec{u} = (x_u, y_u)$ и $\vec{v} = (x_v, y_v)$.

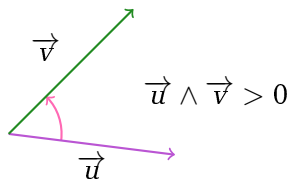
Что можно про них узнать?

Скалярное произведение: $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v$.

Косое произведение: $\vec{u} \wedge \vec{v} = x_u y_v - y_u x_v$.

В общем случае:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \alpha$
- Здесь α — угол от \vec{u} до \vec{v} против часовой стрелки



$\vec{u} \wedge \vec{v} > 0$ — значит, (\vec{u}, \vec{v}) — правая пара

Правая пара: первый вектор пары «справа» от второго.

Другой критерий: от первого ко второму ближе поворачивать, двигаясь против часовой стрелки.

Содержание

- 1 Точки и прямые на плоскости
 - Точки
 - Прямые
 - Прямая и точка
 - Прямая по двум точкам
 - Точка по двум прямым
 - Запись через определители
- 2 Векторы на плоскости
 - Векторы
 - Скалярное произведение
 - Косое произведение
 - Произведения и их знаки
- 3 Задачи
 - Точка и отрезок
 - Точка и луч
 - Порядок вершин треугольника
 - Выпуклость
 - Два отрезка
 - Внутренность
 - Площадь
- 4 Выпуклая оболочка
 - Задача
 - Подготовка
 - Алгоритм Джарвиса
 - Алгоритм Грэхема

Точка и отрезок

Даны отрезок AB и точка C .
Лежит ли точка на отрезке?

Точка и отрезок

Даны отрезок AB и точка C .

Лежит ли точка на отрезке?

Вырожденный случай: $A = B$. Проверим тогда, что $A = C$.

Точка и отрезок

Даны отрезок AB и точка C .

Лежит ли точка на отрезке?

Вырожденный случай: $A = B$. Проверим тогда, что $A = C$.

Невырожденный случай:

1. Проверим, что C лежит на прямой AB .

- Можно построить прямую по двум точкам, а потом подставить C в уравнение прямой.

Точка и отрезок

Даны отрезок AB и точка C .

Лежит ли точка на отрезке?

Вырожденный случай: $A = B$. Проверим тогда, что $A = C$.

Невырожденный случай:

1. Проверим, что C лежит на прямой AB .

- Можно построить прямую по двум точкам, а потом подставить C в уравнение прямой.
- Можно проверить, что $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 0$.
- На самом деле это одна и та же проверка.

Точка и отрезок

Даны отрезок AB и точка C .

Лежит ли точка на отрезке?

Вырожденный случай: $A = B$. Проверим тогда, что $A = C$.

Невырожденный случай:

1. Проверим, что C лежит на прямой AB .

- Можно построить прямую по двум точкам, а потом подставить C в уравнение прямой.
- Можно проверить, что $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 0$.
- На самом деле это одна и та же проверка.

2. Проверим, что C лежит между A и B .

Условие: $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \leq 0$.

При равенстве точка C совпадает с концом отрезка.

Точка и отрезок

Даны отрезок AB и точка C .

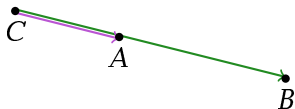
Лежит ли точка на отрезке?

Вырожденный случай: $A = B$. Проверим тогда, что $A = C$.

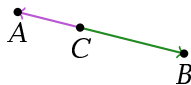
Невырожденный случай:

1. Проверим, что C лежит на прямой AB .

2. Проверим, что C лежит между A и B .



$$\begin{aligned}\vec{AB} \wedge \vec{AC} &= 0 \\ \vec{CA} \cdot \vec{CB} &> 0\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\vec{AB} \wedge \vec{AC} &= 0 \\ \vec{CA} \cdot \vec{CB} &\leq 0\end{aligned}$$

Точка и луч

Даны луч AB и точка C .
Лежит ли точка на луче?

Точка и луч

Даны луч AB и точка C .

Лежит ли точка на луче?

1. Проверим, что C лежит на прямой AB .

Точка и луч

Даны луч AB и точка C .

Лежит ли точка на луче?

1. Проверим, что C лежит на прямой AB .

2. Проверим, что C лежит с той же стороны от A , что и B .

Условие: $\vec{AC} \cdot \vec{AB} \geq 0$.

При равенстве точка C совпадает с началом луча.

Точка и луч

Даны луч AB и точка C .

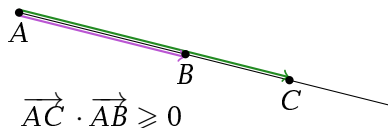
Лежит ли точка на луче?

1. Проверим, что C лежит на прямой AB .

2. Проверим, что C лежит с той же стороны от A , что и B .

Условие: $\vec{AC} \cdot \vec{AB} \geq 0$.

При равенстве точка C совпадает с началом луча.



Порядок вершин треугольника

Даны три вершины треугольника: A , B и C .

Верно ли, что они перечислены против часовой стрелки?

Порядок вершин треугольника

Даны три вершины треугольника: A , B и C .

Верно ли, что они перечислены против часовой стрелки?

Векторы \vec{AB} и \vec{BC} образуют правую пару

\Leftrightarrow

косое произведение $\vec{AB} \wedge \vec{BC} > 0$

\Leftrightarrow

A , B , C перечислены против часовой стрелки.

Выпуклость

Даны вершины многоугольника A_1, A_2, \dots, A_n в порядке обхода (либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки).

Верно ли, что многоугольник выпуклый?

Выпуклость

Даны вершины многоугольника A_1, A_2, \dots, A_n в порядке обхода (либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки).

Верно ли, что многоугольник выпуклый?

Для каждой вершины A_i посмотрим на знак косога произведения $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ и $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$; считаем, что номера точек эквивалентны по модулю n , то есть $A_0 = A_n, A_1 = A_{n+1}, \dots$

Выпуклость

Даны вершины многоугольника A_1, A_2, \dots, A_n в порядке обхода (либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки).

Верно ли, что многоугольник выпуклый?

Для каждой вершины A_i посмотрим на знак косого произведения $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ и $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$; считаем, что номера точек эквивалентны по модулю n , то есть $A_0 = A_n, A_1 = A_{n+1}, \dots$

- Если все косые произведения ≥ 0 , в каждой вершине мы поворачиваем против часовой стрелки, и многоугольник выпуклый.
- Если все косые произведения ≤ 0 , в каждой вершине мы поворачиваем по часовой стрелке, и многоугольник выпуклый.
- Если есть два косых произведения с разными знаками, многоугольник не выпуклый.

Два отрезка

Даны два отрезка: AB и CD . Есть ли у них общие точки?

Два отрезка

Даны два отрезка: AB и CD . Есть ли у них общие точки?

- Проверим пересечение ограничивающих прямоугольников
- Например, у первого отрезка углы ограничивающего прямоугольника такие: $(\min(x_A, x_B), \min(y_A, y_B))$ и $(\max(x_A, x_B), \max(y_A, y_B))$
- Построим две прямые
- Вырожденный случай: прямые совпадают или параллельны

Два отрезка

Даны два отрезка: AB и CD . Есть ли у них общие точки?

- Проверим пересечение ограничивающих прямоугольников
- Например, у первого отрезка углы ограничивающего прямоугольника такие: $(\min(x_A, x_B), \min(y_A, y_B))$ и $(\max(x_A, x_B), \max(y_A, y_B))$
- Построим две прямые
- Вырожденный случай: прямые совпадают или параллельны
- Проверим, что прямая AB пересекает отрезок CD :
- Иными словами, C и D лежат по разные стороны от прямой AB

Два отрезка

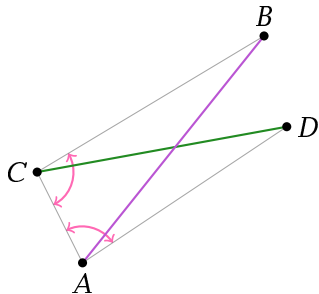
Даны два отрезка: AB и CD . Есть ли у них общие точки?

- Проверим пересечение ограничивающих прямоугольников
- Например, у первого отрезка углы ограничивающего прямоугольника такие: $(\min(x_A, x_B), \min(y_A, y_B))$ и $(\max(x_A, x_B), \max(y_A, y_B))$
- Построим две прямые
- Вырожденный случай: прямые совпадают или параллельны
- Проверим, что прямая AB пересекает отрезок CD :
- Иными словами, C и D лежат по разные стороны от прямой AB
- Проверка: $(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AD}) \leq 0$
- Аналогично проверим, что прямая CD пересекает отрезок AB

Два отрезка

Даны два отрезка: AB и CD . Есть ли у них общие точки?

- Проверим, что прямая AB пересекает отрезок CD :
- Иными словами, C и D лежат по разные стороны от прямой AB
- Проверка: $(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AD}) \leq 0$
- Аналогично проверим, что прямая CD пересекает отрезок AB



Внутренность

Даны вершины многоугольника A_1, A_2, \dots, A_n в порядке обхода (либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки). A также точка P . Верно ли, что P внутри многоугольника?

Внутренность

Даны вершины многоугольника A_1, A_2, \dots, A_n в порядке обхода (либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки). A также точка P . Верно ли, что P внутри многоугольника?

- Проведём из P луч
- Посчитаем, сколько раз он пересекает границу многоугольника: проверим n пересечений луча со стороной
- Чётное количество раз — точка снаружи
- Нечётное количество раз — точка внутри

Внутренность

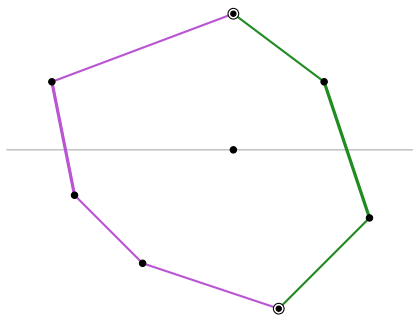
Даны вершины многоугольника A_1, A_2, \dots, A_n в порядке обхода (либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки). A также точка P . Верно ли, что P внутри многоугольника?

- Проведём из P луч
- Посчитаем, сколько раз он пересекает границу многоугольника: проверим n пересечений луча со стороной
- Чётное количество раз — точка снаружи
- Нечётное количество раз — точка внутри
- Удобно провести луч так, чтобы он не был параллелен сторонам и не проходил через вершины
- Например, если координаты целые от -1000 до $+1000$, то подходит луч PQ , где $Q = (x_P + 2001, y_P + 1)$

Внутренность

Даны вершины многоугольника A_1, A_2, \dots, A_n в порядке обхода (либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки). А также точка P . Верно ли, что P внутри многоугольника?

- Если многоугольник выпуклый, можно проверить за $O(\log n)$:



Площадь

Даны вершины многоугольника A_1, A_2, \dots, A_n в порядке обхода (либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки).

Найдите площадь этого многоугольника.

Площадь

Даны вершины многоугольника A_1, A_2, \dots, A_n в порядке обхода (либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки).

Найдите площадь этого многоугольника.

- Посчитаем площадь трапеции со знаком под каждым вектором-стороной: $(x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{i+1} + y_i)/2$
- Ответ — модуль суммы этих площадей. Почему?

Площадь

Даны вершины многоугольника A_1, A_2, \dots, A_n в порядке обхода (либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки).

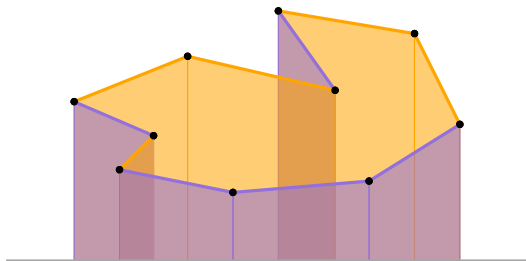
Найдите площадь этого многоугольника.

- Посчитаем площадь трапеции со знаком под каждым вектором-стороной: $(x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{i+1} + y_i)/2$
- Ответ — модуль суммы этих площадей. Почему?
- Для наглядности подвинем многоугольник так, чтобы он был выше оси Ox
- Пусть обход по часовой стрелке
- Прибавляем площади тех трапеций, где мы идём по стороне слева направо
- Отнимаем площади тех трапеций, где мы идём по стороне справа налево
- Прибавили многоугольник и то, что под ним, а отняли то, что под ним — осталась площадь многоугольника

Площадь

Даны вершины многоугольника A_1, A_2, \dots, A_n в порядке обхода (либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки).

Найдите площадь этого многоугольника.



Содержание

- 1 Точки и прямые на плоскости
 - Точки
 - Прямые
 - Прямая и точка
 - Прямая по двум точкам
 - Точка по двум прямым
 - Запись через определители
- 2 Векторы на плоскости
 - Векторы
 - Скалярное произведение
 - Косое произведение
 - Произведения и их знаки
- 3 Задачи
 - Точка и отрезок
 - Точка и луч
 - Порядок вершин треугольника
 - Выпуклость
 - Два отрезка
 - Внутренность
 - Площадь
- 4 Выпуклая оболочка
 - Задача
 - Подготовка
 - Алгоритм Джарвиса
 - Алгоритм Грэхема

Задача

Дано множество точек на плоскости: A_1, A_2, \dots, A_n .
Найдите его выпуклую оболочку.

Выпуклая оболочка множества S — минимальное по включению выпуклое множество, содержащее все точки S .

Множество называется *выпуклым*, если для любых двух его точек P и Q любая точка на отрезке PQ также принадлежит множеству.

Задача

Дано множество точек на плоскости: A_1, A_2, \dots, A_n .
Найдите его выпуклую оболочку.

Выпуклая оболочка множества S — минимальное по включению выпуклое множество, содержащее все точки S .

Множество называется *выпуклым*, если для любых двух его точек P и Q любая точка на отрезке PQ также принадлежит множеству.

Ответ — выпуклый многоугольник с вершинами в некоторых из заданных точек, содержащий все остальные заданные точки.

Подготовка

Утверждение 1: выпуклая оболочка — многоугольник, вершины которого — все крайние точки заданного множества.

Крайняя точка множества S — это точка, через которую можно провести прямую так, чтобы все остальные точки S лежали по одну сторону от этой прямой.

Подготовка

Утверждение 1: выпуклая оболочка — многоугольник, вершины которого — все крайние точки заданного множества.

Крайняя точка множества \mathcal{S} — это точка, через которую можно провести прямую так, чтобы все остальные точки \mathcal{S} лежали по одну сторону от этой прямой.

Зафиксируем крайнюю точку P_0 и рассмотрим векторы из неё во все остальные точки множества. Определим отношение порядка на остальных точках: $A_i < A_j$, если $\overrightarrow{P_0A_i} \wedge \overrightarrow{P_0A_j} > 0$.

Утверждение 2: это действительно отношение порядка (свойства: антисимметричность, антирефлексивность, транзитивность).

Подготовка

Утверждение 1: выпуклая оболочка — многоугольник, вершины которого — все крайние точки заданного множества.

Крайняя точка множества \mathcal{S} — это точка, через которую можно провести прямую так, чтобы все остальные точки \mathcal{S} лежали по одну сторону от этой прямой.

Зафиксируем крайнюю точку P_0 и рассмотрим векторы из неё во все остальные точки множества. Определим отношение порядка на остальных точках: $A_i < A_j$, если $\overrightarrow{P_0A_i} \wedge \overrightarrow{P_0A_j} > 0$.

Утверждение 2: это действительно отношение порядка (свойства: антисимметричность, антирефлексивность, транзитивность).

Геометрический смысл: это сортировка по полярному углу, если P_0 объявить началом координат. В частности, минимальный элемент — «самый правый»: если A_k меньше всех других A_j , то A_k образует правую пару с любым A_j .

Алгоритм Джарвиса

- 1 Начнём с P_0 , любой крайней точки множества: например, с минимальной как пара (x, y)
- 2 Присвоим $P \leftarrow P_0$
- 3 Добавим P в ответ
- 4 Построим векторы из P во все оставшиеся точки и выберем «самую правую» из них, R (а при равенстве — наиболее удалённую)
- 5 Если $R = P_0$, закончим работу, иначе присвоим $P \leftarrow R$ и перейдём к шагу 3

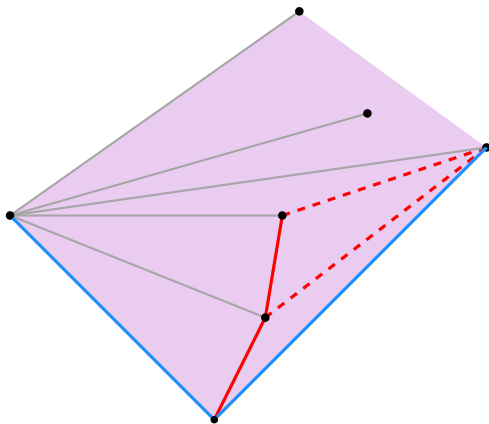
Алгоритм работает за $O(nk)$, где k — количество вершин в выпуклой оболочке.

Алгоритм Грэхема

- 1 Начнём с P_0 , любой крайней точки множества: например, с минимальной как пара (x, y)
- 2 Отсортируем все оставшиеся точки по углу, считая P_0 началом координат (при равенстве — по *возрастанию* расстояния до P_0)
- 3 Заведём стек S_1, S_2, \dots, S_k , изначально добавим туда P_0
- 4 Будем рассматривать точки A_i в порядке сортировки
- 5 Для каждой точки A_i :
 - 6 Пока $k \geq 2$, будем рассматривать векторы $S_{k-1}S_k$ и S_kA_i
 - 7 Если они не образуют правую двойку, удалим S_k из стека и перейдём опять к шагу 6
 - 8 Добавим A_i в стек и перейдём к следующей точке в шаге 5

Алгоритм работает за $O(n \log n)$.

Алгоритм Грэхема



Вопросы?

Вопросы?