

Графы

Борис Золотов (Б06)

Иван Казменко (Б01, Б05)

Владислав Макаров (Б02, Б03)

Вячеслав Соколов (Б09)

Арина Филимонова (Б10)

Санкт-Петербургский Государственный Университет

Вторник, 5 декабря 2023 года

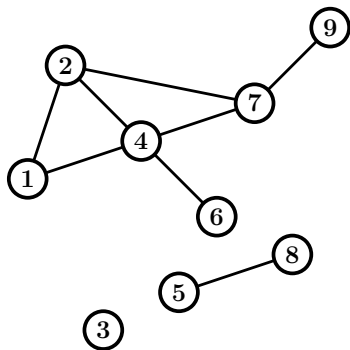
Содержание

- 1 Введение
 - Определения
 - Задание графа
 - Хранение графа
 - Код
- 2 Поиск в ширину
 - Пример
 - Код
- 3 Поиск в глубину
 - Пример
 - Код
- 4 Неявные графы
 - Клетчатая доска
 - Шахматный конь
- 5 Задачи
 - Связность
 - Дерево
 - Топологическая сортировка
 - Мосты

Содержание

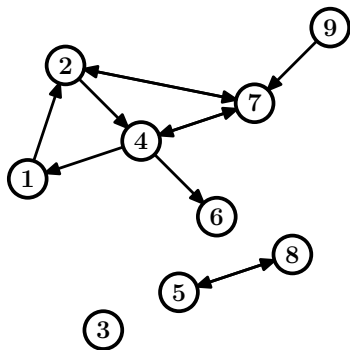
- 1 Введение
 - Определения
 - Задание графа
 - Хранение графа
 - Код
- 2 Поиск в ширину
 - Пример
 - Код
- 3 Поиск в глубину
 - Пример
 - Код
- 4 Неявные графы
 - Клетчатая доска
 - Шахматный конь
- 5 Задачи
 - Связность
 - Дерево
 - Топологическая сортировка
 - Мосты

Определения



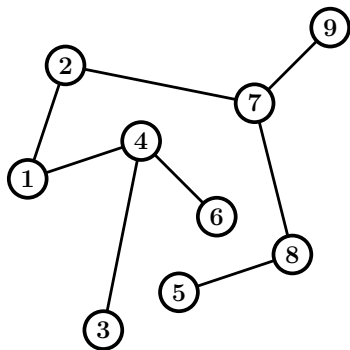
Определение: граф (неориентированный) — это пара (V, E) , где V — множество вершин, а E — множество (неориентированных) рёбер. Каждое ребро — это неупорядоченная пара вершин.

Определения



Определение: ориентированный граф (орграф) — это пара (V, E) , где V — множество вершин, а E — множество дуг (ориентированных рёбер). Каждое ребро — это упорядоченная пара вершин.

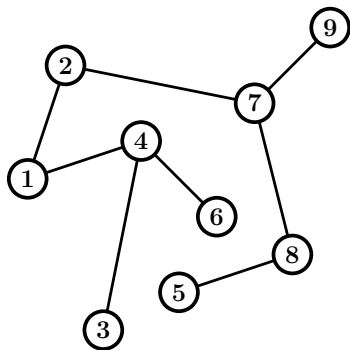
Определения



Определение: дерево — это связный граф без циклов.

Необходимые определения: компонента связности, связный граф, цикл.

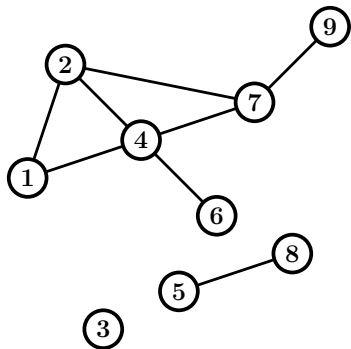
Определения



Критерий: обыкновенный граф является деревом, если он связан и $|E| = |V| - 1$.

Необходимое определение: обыкновенный граф.

Задание графа



Ввод:

9 8

1 2

1 4

2 7

2 4

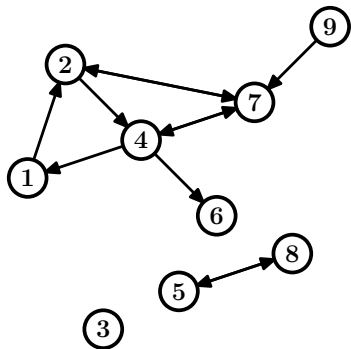
4 6

4 7

5 8

7 9

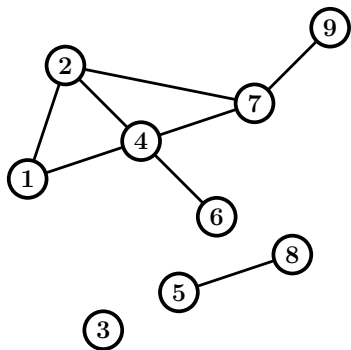
Задание графа



Ввод:

```
9 11
1 2
2 7
2 4
4 1
7 2
4 6
4 7
5 8
7 4
8 5
9 7
```

Матрица смежности

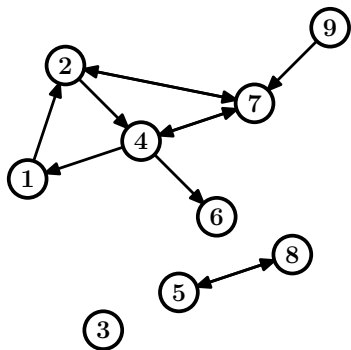


Ввод:

9 8
 1 2
 1 4
 2 7
 2 4
 4 6
 4 7
 5 8
 7 9

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	0	0	1	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	1	0	0	0	1	1	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	1	0	0	0	0	0
7	0	1	0	1	0	0	0	0	1
8	0	0	0	0	1	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	1	0	0

Матрица смежности



Ввод:

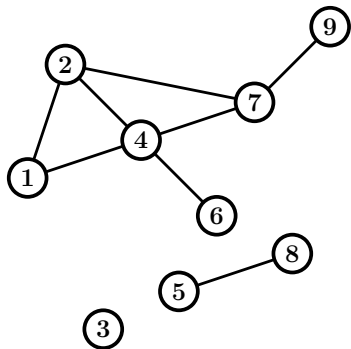
```

9 11
1 2
2 7
2 4
4 1
4 1
7 2
4 6
4 7
5 8
7 4
8 5
9 7

```

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	0	0	1	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	1	1	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	1	0	1	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	1	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	1	0	0

Списки смежных вершин

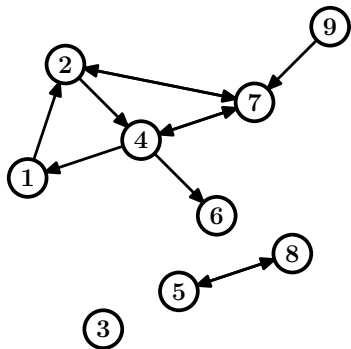


Ввод:

```
9 8
1 2
1 4
2 7
2 4
4 6
4 7
5 8
7 9
```

1	2	4		
2	1	7	4	
3				
4	1	2	6	7
5	8			
6	4			
7	2	4	9	
8	5			
9	7			

Списки смежных вершин

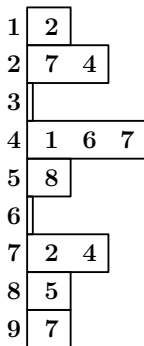


Ввод:

```

9 11
1 2
2 7
2 4
4 1
7 2
4 6
4 7
5 8
7 4
8 5
9 7

```



Матрица смежности

```

1  #include <iostream>
2  #include <vector>
3  using namespace std;
4
5  int main () {
6      int n, m;
7      cin >> n >> m;
8      vector <vector <int> > a (n,
9          vector <int> (n, 0));
10     for (int j = 0; j < m; j++) {
11         int u, v;
12         cin >> u >> v;
13         u -- 1;
14         v -- 1;
15         a[u][v] = 1;
16         a[v][u] = 1;
17     }
18     return 0;
19 }

```

ВВОД:

```

9 8
1 2
1 4
2 7
2 4
4 6
4 7
5 8
7 9

```

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	0	0	0	1	1	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	1	0
5	0	0	0	1	0	0	0	0	0
6	0	1	0	1	0	0	0	0	1
7	0	0	0	0	1	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	1	0	0

Матрица смежности

```

1  #include <iostream>
2  #include <vector>
3  using namespace std;
4
5  int main () {
6      int n, m;
7      cin >> n >> m;
8      vector <vector <int> > a (n,
9          vector <int> (n, 0));
10     for (int j = 0; j < m; j++) {
11         int u, v;
12         cin >> u >> v;
13         u -= 1;
14         v -= 1;
15         a[u][v] = 1;
16
17     }
18     return 0;
19 }

```

ВВОД:

```

9 11
1 2
2 7
2 4
4 1
7 2
4 6
4 7
5 8
7 4
8 5
9 7

```

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	1	1	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	1	0	1	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	1	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	1	0	0

Списки смежных вершин

```

1  #include <iostream>
2  #include <vector>
3  using namespace std;
4
5  int main () {
6      int n, m;
7      cin >> n >> m;
8      vector <vector <int> > adj (n);
9
10     for (int j = 0; j < m; j++) {
11         int u, v;
12         cin >> u >> v;
13         u -= 1;
14         v -= 1;
15         adj[u].push_back (v);
16         adj[v].push_back (u);
17     }
18     return 0;
19 }
```

Ввод:

```

9 8
1 2
1 4
2 7
2 4
4 6
4 7
5 8
7 9
```

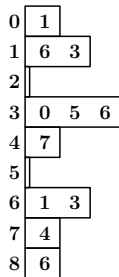
0	1	3		
1	0	6	3	
2				
3	0	1	5	6
4	7			
5	3			
6	1	3	8	
7	4			
8	6			

Списки смежных вершин

```
1  #include <iostream>
2  #include <vector>
3  using namespace std;
4
5  int main () {
6      int n, m;
7      cin >> n >> m;
8      vector <vector <int> > adj (n);
9
10     for (int j = 0; j < m; j++) {
11         int u, v;
12         cin >> u >> v;
13         u -- 1;
14         v -- 1;
15         adj[u].push_back (v);
16
17     }
18     return 0;
19 }
```

ВВОД:

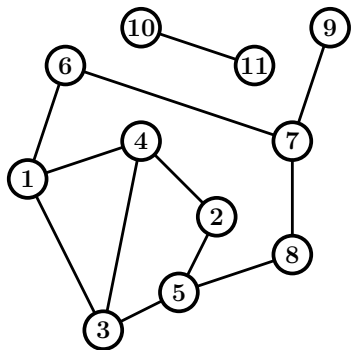
```
9 11
1 2
2 7
2 4
4 1
7 2
4 6
4 7
5 8
7 4
8 5
9 7
```



Содержание

- 1 Введение
 - Определения
 - Задание графа
 - Хранение графа
 - Код
- 2 Поиск в ширину
 - Пример
 - Код
- 3 Поиск в глубину
 - Пример
 - Код
- 4 Неявные графы
 - Клетчатая доска
 - Шахматный конь
- 5 Задачи
 - Связность
 - Дерево
 - Топологическая сортировка
 - Мосты

Пример



Ввод:

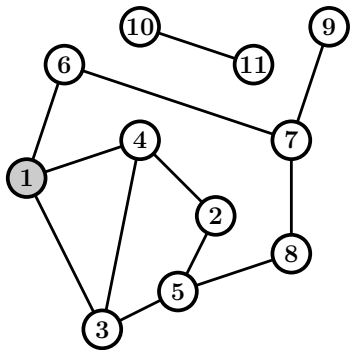
```
11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11
```

Вывод:

```
1: 0
3: 1
4: 1
6: 1
5: 2
2: 2
7: 2
8: 3
9: 3
```

Задача: найдите кратчайшие расстояния от вершины 1 до всех остальных вершин.

Пример



1

Ввод:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

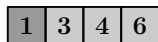
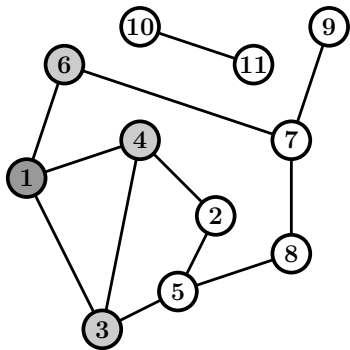
Вывод:

```

1: 0
3: 1
4: 1
6: 1
5: 2
2: 2
7: 2
8: 3
9: 3

```

Пример



Ввод:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

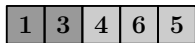
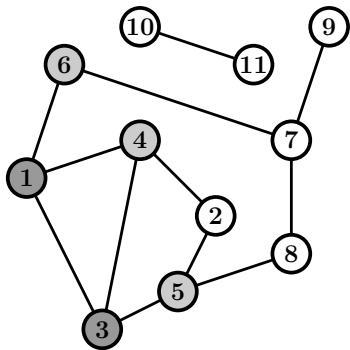
Вывод:

```

1: 0
3: 1
4: 1
6: 1
5: 2
2: 2
7: 2
8: 3
9: 3

```

Пример



Ввод:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

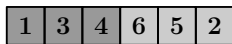
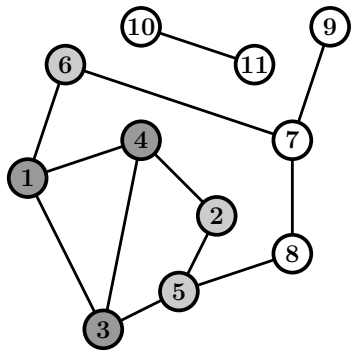
Вывод:

```

1: 0
3: 1
4: 1
6: 1
5: 2
2: 2
7: 2
8: 3
9: 3

```

Пример



Ввод:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

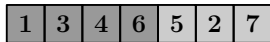
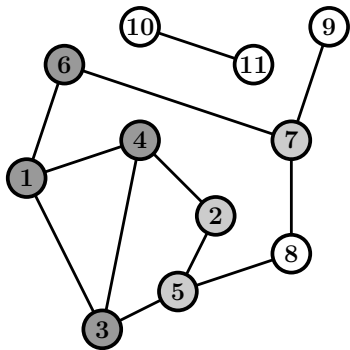
Вывод:

```

1: 0
3: 1
4: 1
6: 1
5: 2
2: 2
7: 2
8: 3
9: 3

```

Пример



Ввод:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

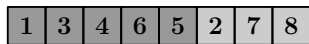
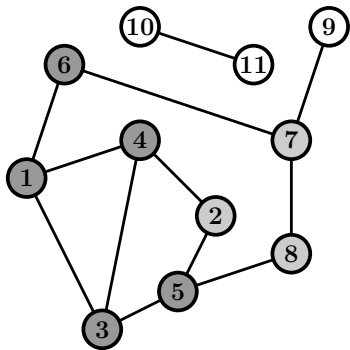
Вывод:

```

1: 0
3: 1
4: 1
6: 1
5: 2
2: 2
7: 2
8: 3
9: 3

```

Пример



ВВОД:

11 12

1 6

1 4

6 7

2 5

4 3

4 2

5 8

7 8

7 9

1 3

3 5

10 11

ВЫВОД:

1: 0

3: 1

4: 1

6: 1

5: 2

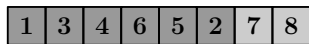
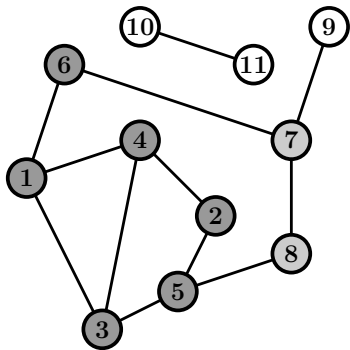
2: 2

7: 2

8: 3

9: 3

Пример



Ввод:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

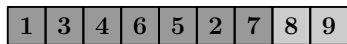
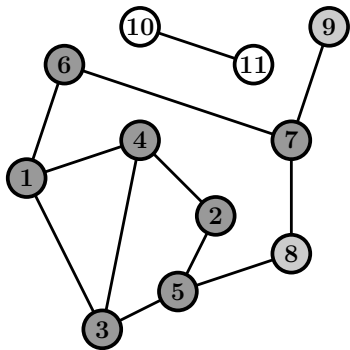
Вывод:

```

1: 0
3: 1
4: 1
6: 1
5: 2
2: 2
7: 2
8: 3
9: 3

```

Пример



Ввод:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

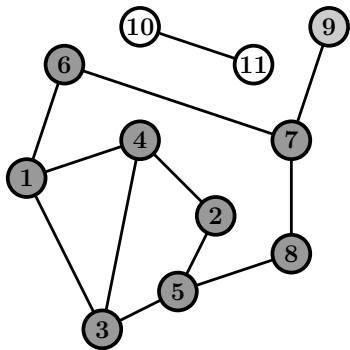
Вывод:

```

1: 0
3: 1
4: 1
6: 1
5: 2
2: 2
7: 2
8: 3
9: 3

```

Пример



Ввод:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

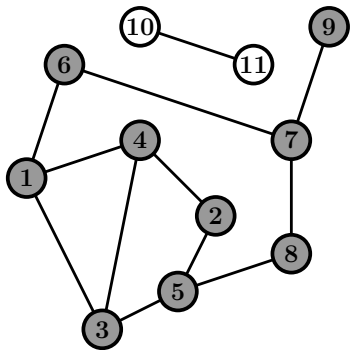
Вывод:

```

1: 0
3: 1
4: 1
6: 1
5: 2
2: 2
7: 2
8: 3
9: 3

```

Пример



Ввод:

```
11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11
```

Вывод:

```
1: 0
3: 1
4: 1
6: 1
5: 2
2: 2
7: 2
8: 3
9: 3
```

Код breadth-first search

```

1  /* ... */
2  int const infinity = 1E9 + 1;
3  /* ... */
4  vector <int> d (n, infinity);
5  queue <int> q;
6  d[0] = 0;
7  q.push (0);
8  while (!q.empty ()) {
9      auto v = q.front ();
10     q.pop ();
11     cout << v + 1 << ": " << d[v] << endl;
12     for (int u = 0; u < n; u++) if (a[v][u]) {
13         if (d[u] == infinity) {
14             d[u] = d[v] + 1;
15             q.push (u);
16         }
17     }
18 }
19 /* ... */

```

Вывод:

```

1: 0
3: 1
4: 1
6: 1
5: 2
2: 2
7: 2
8: 3
9: 3

```

Код breadth-first search

```
1  /* ... */
2  int const infinity = 1E9 + 1;
3  /* ... */
4  vector <int> d (n, infinity);
5  queue <int> q;
6  d[0] = 0;
7  q.push (0);
8  while (!q.empty ()) {
9      auto v = q.front ();
10     q.pop ();
11     cout << v + 1 << ": " << d[v] << endl;
12     for (auto u : adj[v]) {
13         if (d[u] == infinity) {
14             d[u] = d[v] + 1;
15             q.push (u);
16         }
17     }
18 }
19 /* ... */
```

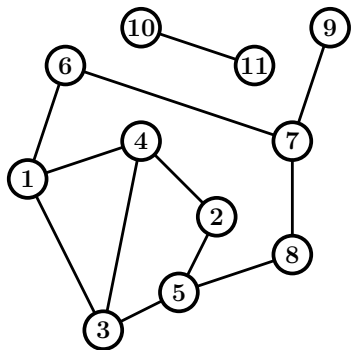
Вывод:

```
1: 0
3: 1
4: 1
6: 1
5: 2
2: 2
7: 2
8: 3
9: 3
```

Содержание

- 1 Введение
 - Определения
 - Задание графа
 - Хранение графа
 - Код
- 2 Поиск в ширину
 - Пример
 - Код
- 3 Поиск в глубину
 - Пример
 - Код
- 4 Неявные графы
 - Клетчатая доска
 - Шахматный конь
- 5 Задачи
 - Связность
 - Дерево
 - Топологическая сортировка
 - Мосты

Пример



Задача: посетите все вершины, достижимые из вершины 1.

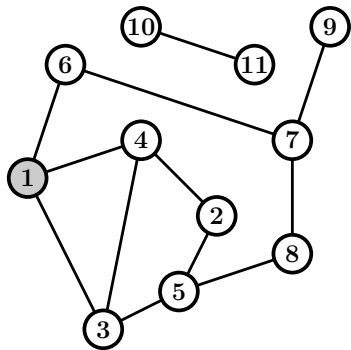
Ввод:

```
11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11
```

Вывод:

```
in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1
```

Пример



1

ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

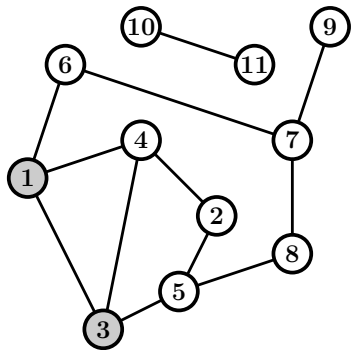
ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1

```

Пример



1	3
---	---

ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

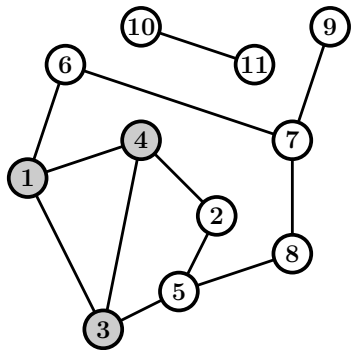
ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1

```

Пример



1	3	4
---	---	---

ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

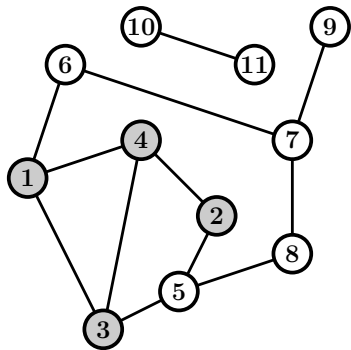
ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1

```

Пример



1	3	4	2
---	---	---	---

ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

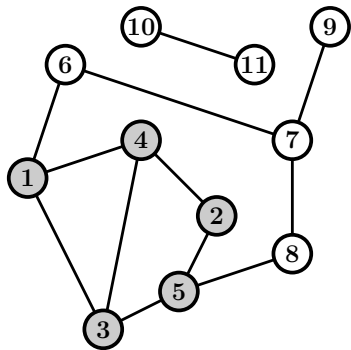
ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1

```

Пример



1	3	4	2	5
---	---	---	---	---

ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

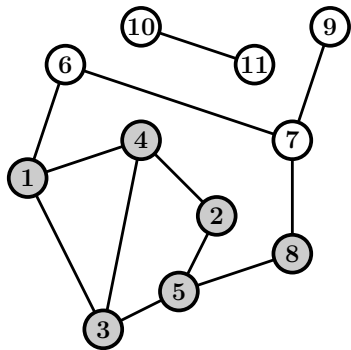
ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1

```

Пример



1	3	4	2	5	8
---	---	---	---	---	---

ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

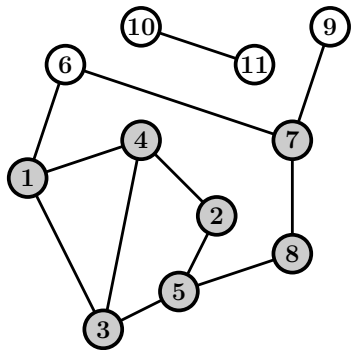
ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1

```

Пример



1	3	4	2	5	8	7
---	---	---	---	---	---	---

ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

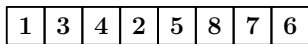
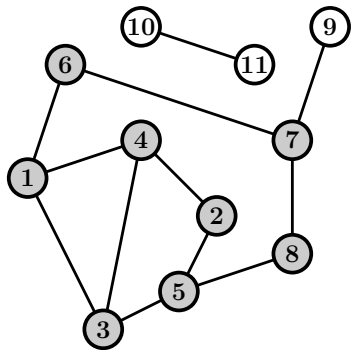
ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1

```

Пример



ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

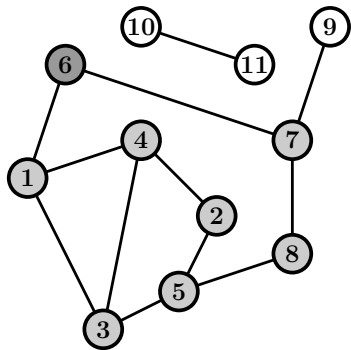
ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1

```

Пример



1	3	4	2	5	8	7
---	---	---	---	---	---	---

ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

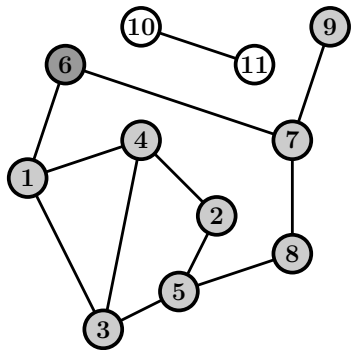
ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1

```

Пример



1	3	4	2	5	8	7	9
---	---	---	---	---	---	---	---

ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

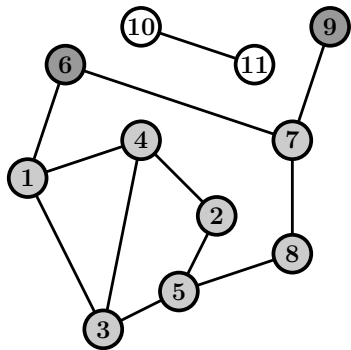
ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1

```

Пример



1	3	4	2	5	8	7
---	---	---	---	---	---	---

ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

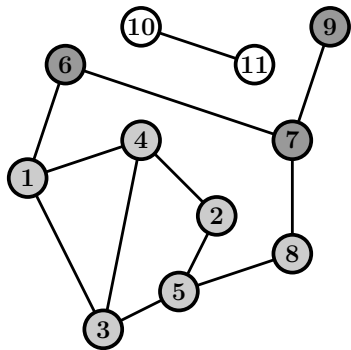
ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1

```

Пример



1	3	4	2	5	8
---	---	---	---	---	---

ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

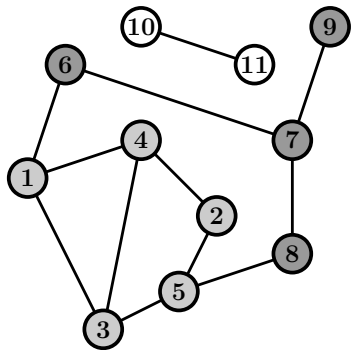
ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1

```

Пример



1	3	4	2	5
---	---	---	---	---

ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

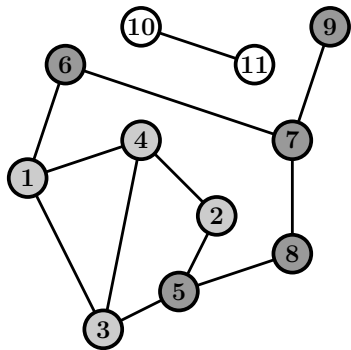
ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1

```

Пример



1	3	4	2
---	---	---	---

ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

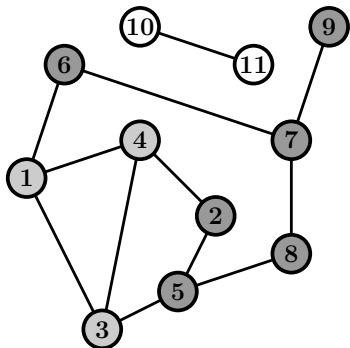
ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1

```

Пример



1	3	4
---	---	---

ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

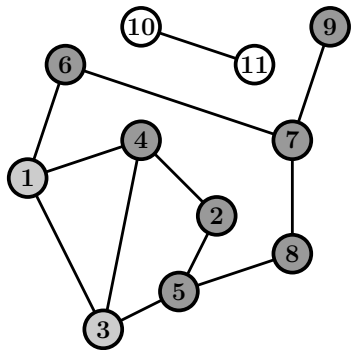
ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1

```

Пример



1	3
---	---

ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

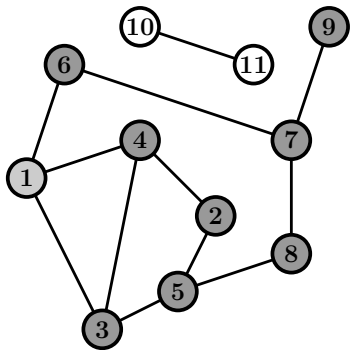
ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1

```

Пример



1

ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

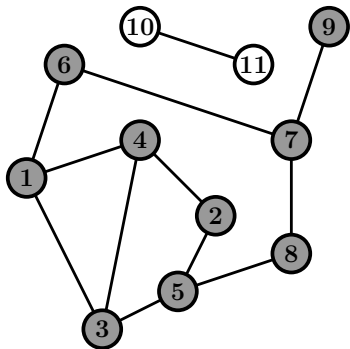
ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1

```

Пример



ВВОД:

11 12

1 6

1 4

6 7

2 5

4 3

4 2

5 8

7 8

7 9

1 3

3 5

10 11

ВЫВОД:

in 1

in 3

in 4

in 2

in 5

in 8

in 7

in 6

out 6

in 9

out 9

out 7

out 8

out 5

out 2

out 4

out 3

out 1

Код depth-first search

```

1  /* ... */
2  vector <vector <int> > a;
3  vector <bool> vis;
4  int n, m;
5
6  void dfs (int v) {
7      if (vis[v])
8          return;
9      vis[v] = true;
10     cout << "in " << v + 1 << endl;
11     for (int u = 0; u < n; u++) if (a[v][u]) {
12         dfs (u);
13     }
14     cout << "out " << v + 1 << endl;
15 }
16 /* ... */
17     vis = vector <bool> (n);
18     dfs (0);
19 /* ... */

```

ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1

```

Код depth-first search

```
1  /* ... */
2  vector <vector <int> > adj;
3  vector <bool> vis;
4  int n, m;
5
6  void dfs (int v) {
7      if (vis[v])
8          return;
9      vis[v] = true;
10     cout << "in " << v + 1 << endl;
11     for (auto u : adj[v]) {
12         dfs (u);
13     }
14     cout << "out " << v + 1 << endl;
15 }
16 /* ... */
17     vis = vector <bool> (n);
18     dfs (0);
19 /* ... */
```

ВЫВОД:

```
in 1
in 6
in 7
in 8
in 5
in 2
in 4
in 3
out 3
out 4
out 2
out 5
out 8
in 9
out 9
out 6
out 1
```

Содержание

- 1 Введение
 - Определения
 - Задание графа
 - Хранение графа
 - Код
- 2 Поиск в ширину
 - Пример
 - Код
- 3 Поиск в глубину
 - Пример
 - Код
- 4 Неявные графы
 - Клетчатая доска
 - Шахматный конь
- 5 Задачи
 - Связность
 - Дерево
 - Топологическая сортировка
 - Мосты

Клетчатая доска

Пример 1:

- Есть клетчатая доска.
- Некоторые клетки заняты.
- Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.
- За один шаг можно перемещаться на соседнюю незанятую клетку.
- Определите, куда можно добраться из начальной клетки.

Клетчатая доска

Пример 1:

- Есть клетчатая доска.
- Некоторые клетки заняты.
- Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.
- За один шаг можно перемещаться на соседнюю незанятую клетку.
- Определите, куда можно добраться из начальной клетки.

Как будем решать:

- Граф: вершины — клетки, рёбра — переходы в соседей.

Клетчатая доска

Пример 1:

- Есть клетчатая доска.
- Некоторые клетки заняты.
- Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.
- За один шаг можно перемещаться на соседнюю незанятую клетку.
- Определите, докуда можно добраться из начальной клетки.

Как будем решать:

- Граф: вершины — клетки, рёбра — переходы в соседей.
- Нужно найти компоненту связности начальной клетки.

Клетчатая доска

Пример 1:

- Есть клетчатая доска.
- Некоторые клетки заняты.
- Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.
- За один шаг можно перемещаться на соседнюю незанятую клетку.
- Определите, куда можно добраться из начальной клетки.

Как будем решать:

- Граф: вершины — клетки, рёбра — переходы в соседей.
- Нужно найти компоненту связности начальной клетки.
- Будем нумеровать вершины и рёбра?

Клетчатая доска — решение

- Граф: вершины — клетки, рёбра — переходы в соседей.
- Нужно найти компоненту связности начальной клетки.
- Вершина — это координаты (row, col).

Клетчатая доска — решение

- Граф: вершины — клетки, рёбра — переходы в соседей.
- Нужно найти компоненту связности начальной клетки.
- Вершина — это координаты (row, col).
- Рёбра:
 - в (row - 1, col),
 - в (row, col - 1),
 - в (row + 1, col),
 - в (row, col + 1).

Клетчатая доска — решение

- Граф: вершины — клетки, рёбра — переходы в соседей.
- Нужно найти компоненту связности начальной клетки.

```
1  int const dirs = 4;
2  int const dRow [dirs] = {-1, 0, +1, 0};
3  int const dCol [dirs] = { 0, -1, 0, +1};
4  /* ... */
5  void dfs (int row, int col) {
6      if (vis[row][col]) return;
7      vis[row][col] = true;
8      for (int dir = 0; dir < dirs; dir++) {
9          int nRow = row + dRow[dir];
10         int nCol = col + dCol[dir];
11         if (0 <= nRow && nRow < rows &&
12             0 <= nCol && nCol < cols &&
13             !wall[nRow][nCol]) {
14             dfs (nRow, nCol);
15         }
16     }
17 }
```

Шахматный конь

Пример 2:

- На шахматной доске $n \times n$ в клетке A стоит конь.
- За какое минимальное количество ходов он может попасть в клетку B ?

Шахматный конь

Пример 2:

- На шахматной доске $n \times n$ в клетке A стоит конь.
- За какое минимальное количество ходов он может попасть в клетку B ?

Как будем решать:

- Граф: вершины — клетки, рёбра — ходы коня.

Шахматный конь

Пример 2:

- На шахматной доске $n \times n$ в клетке A стоит конь.
- За какое минимальное количество ходов он может попасть в клетку B ?

Как будем решать:

- Граф: вершины — клетки, рёбра — ходы коня.
- Нужно запустить поиск в ширину из клетки A .

Шахматный конь — решение

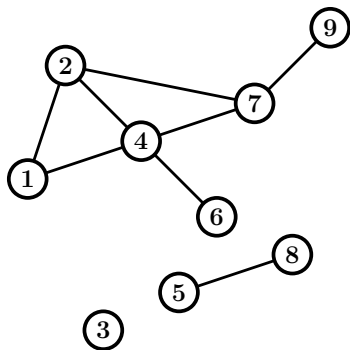
- Граф: вершины — клетки, рёбра — ходы коня.
- Нужно запустить поиск в ширину из клетки A.

```
1  int const dirs = 8;
2  int const dRow [dirs] = {-1, -2, -2, -1, +1, +2, +2, +1};
3  int const dCol [dirs] = {-2, -1, +1, +2, +2, +1, -1, -2};
4  /* ... */
5      while (!q.empty ()) {
6          int row = q.front ().first;
7          int col = q.front ().second;
8          q.pop ();
9          for (int dir = 0; dir < dirs; dir++) {
10             int nRow = row + dRow[dir];
11             int nCol = col + dCol[dir];
12             if (0 <= nRow && nRow < rows &&
13                 0 <= nCol && nCol < cols &&
14                 d[nRow][nCol] == infinity) {
15                 d[nRow][nCol] = d[row][col] + 1;
16                 q.push (make_pair (nRow, nCol));
17             }
18         }
```

Содержание

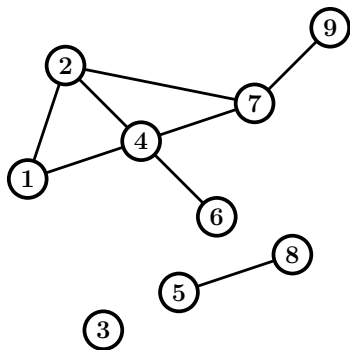
- 1 Введение
 - Определения
 - Задание графа
 - Хранение графа
 - Код
- 2 Поиск в ширину
 - Пример
 - Код
- 3 Поиск в глубину
 - Пример
 - Код
- 4 Неявные графы
 - Клетчатая доска
 - Шахматный конь
- 5 Задачи
 - Связность
 - Дерево
 - Топологическая сортировка
 - Мосты

СВЯЗНОСТЬ



Дан неориентированный граф. Проверьте, связан ли он.

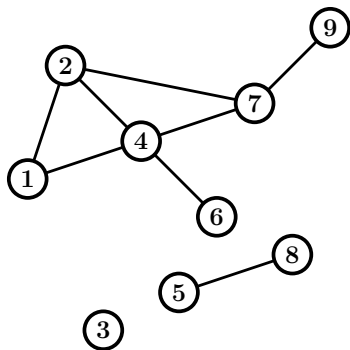
СВЯЗНОСТЬ



Дан неориентированный граф. Проверьте, связан ли он.
Как будем решать:

- Запустим поиск из любой вершины.

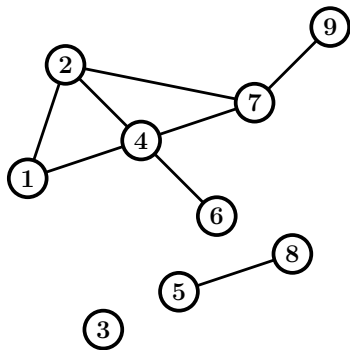
СВЯЗНОСТЬ



Дан неориентированный граф. Проверьте, связан ли он.
Как будем решать:

- Запустим поиск из любой вершины.
- Можно поиск в ширину, можно поиск в глубину.

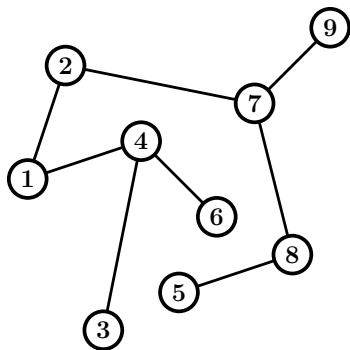
СВЯЗНОСТЬ



Дан неориентированный граф. Проверьте, связан ли он.
Как будем решать:

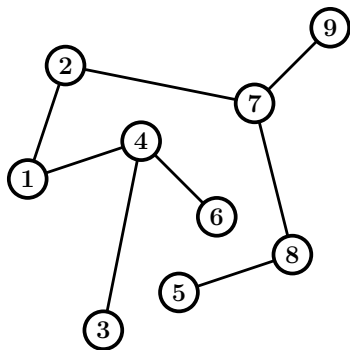
- Запустим поиск из любой вершины.
- Можно поиск в ширину, можно поиск в глубину.
- Проверим, что мы посетили все вершины.

Дерево



Дан неориентированный граф. Проверьте, является ли он деревом.

Дерево

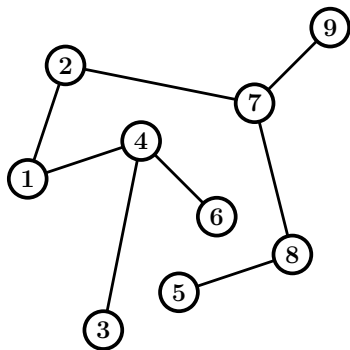


Дан неориентированный граф. Проверьте, является ли он деревом.

Как будем решать:

- Проверим связность.

Дерево



Дан неориентированный граф. Проверьте, является ли он деревом.

Как будем решать:

- Проверим связность.
- Проверим, что $|V| = |E| + 1$.

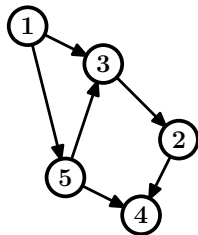
Топологическая сортировка

Дан ориентированный граф. Расположите его вершины в таком порядке, чтобы все дуги следовали от более ранних вершин к более поздним. Или выясните, что это невозможно.

Топологическая сортировка

Дан ориентированный граф. Расположите его вершины в таком порядке, чтобы все дуги следовали от более ранних вершин к более поздним. Или выясните, что это невозможно.

Пример 1:



Ввод:

```
5 6  
1 5  
5 3  
3 2  
2 4  
5 4  
1 3
```

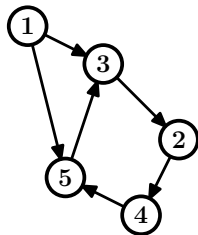
Вывод:

```
YES  
1 5 3 2 4
```

Топологическая сортировка

Дан ориентированный граф. Расположите его вершины в таком порядке, чтобы все дуги следовали от более ранних вершин к более поздним. Или выясните, что это невозможно.

Пример 2:



Ввод:

```
5 6  
1 5  
5 3  
3 2  
2 4  
4 5  
1 3
```

Вывод:

```
NO
```

Топологическая сортировка

Дан ориентированный граф. Расположите его вершины в таком порядке, чтобы все дуги следовали от более ранних вершин к более поздним. Или выясните, что это невозможно. Как будем решать:

- Посещаем вершины поиском в глубину.

Топологическая сортировка

Дан ориентированный граф. Расположите его вершины в таком порядке, чтобы все дуги следовали от более ранних вершин к более поздним. Или выясните, что это невозможно.

Как будем решать:

- Посещаем вершины поиском в глубину.
- Пусть мы находимся в какой-то вершине v .

Топологическая сортировка

Дан ориентированный граф. Расположите его вершины в таком порядке, чтобы все дуги следовали от более ранних вершин к более поздним. Или выясните, что это невозможно.

Как будем решать:

- Посещаем вершины поиском в глубину.
- Пусть мы находимся в какой-то вершине v .
- Условимся, что, когда вершина посещена, она выведена, то есть добавлена в порядок.

Топологическая сортировка

Дан ориентированный граф. Расположите его вершины в таком порядке, чтобы все дуги следовали от более ранних вершин к более поздним. Или выясните, что это невозможно.

Как будем решать:

- Посещаем вершины поиском в глубину.
- Пусть мы находимся в какой-то вершине v .
- Условимся, что, когда вершина посещена, она выведена, то есть добавлена в порядок.
- Посетим все вершины u , из которых есть дуга $u \rightarrow v$.

Топологическая сортировка

Дан ориентированный граф. Расположите его вершины в таком порядке, чтобы все дуги следовали от более ранних вершин к более поздним. Или выясните, что это невозможно.

Как будем решать:

- Посещаем вершины поиском в глубину.
- Пусть мы находимся в какой-то вершине v .
- Условимся, что, когда вершина посещена, она выведена, то есть добавлена в порядок.
- Посетим все вершины u , из которых есть дуга $u \rightarrow v$.
- После этого выведем вершину v , тем самым выполнив наше условие.

Топологическая сортировка

Как найти все такие u , для которых $u \rightarrow v$?

Топологическая сортировка

Как найти все такие u , для которых $u \rightarrow v$?

- Можно хранить не сами рёбра ($u \rightarrow v$), а обратные к ним ($v \rightarrow u$).

Топологическая сортировка

Как найти все такие u , для которых $u \rightarrow v$?

- Можно хранить не сами рёбра ($u \rightarrow v$), а обратные к ним ($v \rightarrow u$).
- Можно найти обратный порядок, а потом его перевернуть.

Топологическая сортировка

Как выяснить, что ответ не существует?

Топологическая сортировка

Как выяснить, что ответ не существует?

- У вершины три состояния:
 - 0 ещё не посещали (fresh),
 - 1 начали посещать и не закончили (busy),
 - 2 уже посетили (done).

Топологическая сортировка

Как выяснить, что ответ не существует?

- У вершины три состояния:
 - 0 ещё не посещали (fresh),
 - 1 начали посещать и не закончили (busy),
 - 2 уже посетили (done).
- Если мы пришли посещать вершину в состоянии fresh, запускаем алгоритм в ней.

Топологическая сортировка

Как выяснить, что ответ не существует?

- У вершины три состояния:
 - 0 ещё не посещали (fresh),
 - 1 начали посещать и не закончили (busy),
 - 2 уже посетили (done).
- Если мы пришли посещать вершину в состоянии fresh, запускаем алгоритм в ней.
- Если мы пришли посещать вершину в состоянии done, ничего не делаем с ней.

Топологическая сортировка

Как выяснить, что ответ не существует?

- У вершины три состояния:
 - 0 ещё не посещали (fresh),
 - 1 начали посещать и не закончили (busy),
 - 2 уже посетили (done).
- Если мы пришли посещать вершину в состоянии fresh, запускаем алгоритм в ней.
- Если мы пришли посещать вершину в состоянии done, ничего не делаем с ней.
- Если мы пришли посещать вершину в состоянии busy, значит, мы нашли цикл, и ответ не существует.

Топологическая сортировка — код

```
1  vector <vector <int> > adj;
2  vector <int> vis;
3  vector <int> order;
4  int n, m;
5
6  enum {fresh, busy, done};
7
8  bool dfs (int v) {
9      if (vis[v] != fresh)
10         return vis[v] == done;
11     vis[v] = busy;
12     for (auto u : adj[v])
13         if (!dfs (u))
14             return false;
15     order.push_back (v);
16     vis[v] = done;
17     return true;
18 }
```

Топологическая сортировка — код

```
1     cin >> n >> m;
2     adj = vector <vector <int> > (n);
3     for (int j = 0; j < m; j++) {
4         int u, v;
5         cin >> u >> v;
6         u -= 1;
7         v -= 1;
8         adj[v].push_back (u);
9     }
10
11    vis = vector <int> (n);
12    bool ok = true;
13    for (int v = 0; v < n; v++)
14        ok &= dfs (v);
15
16    if (ok) {
17        cout << "YES" << endl;
18        for (auto v : order)
19            cout << v + 1 << " ";
20        cout << endl;
21    }
22    else
23        cout << "NO" << endl;
```

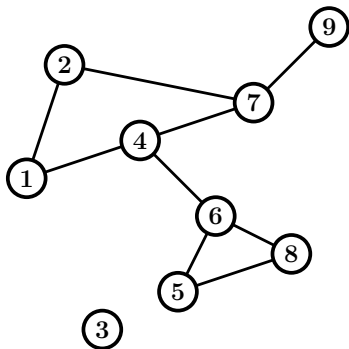
Мосты

Дан неориентированный граф. Найдите все мосты в нём: рёбра, при удалении которых количество компонент связности увеличивается.

Мосты

Дан неориентированный граф. Найдите все мосты в нём: рёбра, при удалении которых количество компонент связности увеличивается.

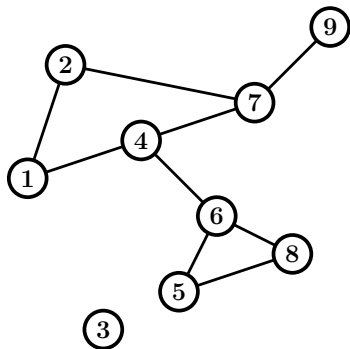
Пример:



Мосты

Дан неориентированный граф. Найдите все мосты в нём: рёбра, при удалении которых количество компонент связности увеличивается.

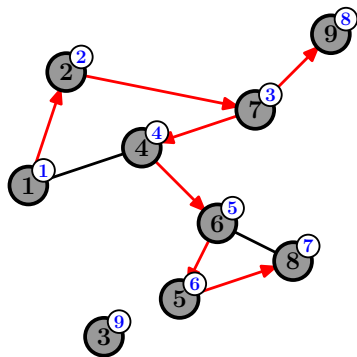
Пример:



Здесь мосты — рёбра 4–6 и 7–9.

Мосты

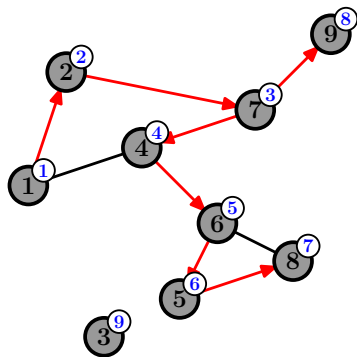
Идея решения:



Запустим поиск в глубину от всех ещё не посещённых вершин, запишем время входа в каждой вершине (синее число).

Мосты

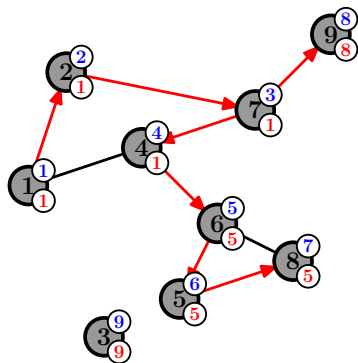
Идея решения:



Для каждой вершины рассмотрим её поддерево в поиске в глубину (красные стрелки). Все рёбра, не вошедшие в дерево — обратные рёбра (чёрные).

Мосты

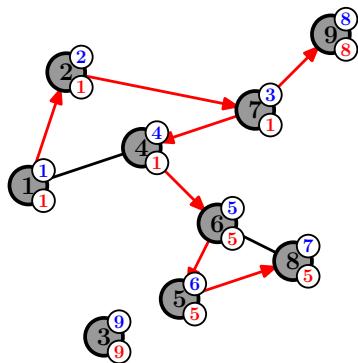
Идея решения:



Посмотрим, какие времена входа достижимы, если ходить по этому поддереву и в конце, может быть, пройти по обратному ребру. Запишем минимальное из них (красное число).

Мосты

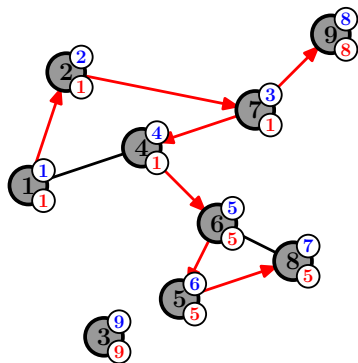
Идея решения:



Если в вершине синее число (время входа) равно красному (минимум достижимых), то ребро дерева, идущее в эту вершину, является мостом (если оно есть).

Мосты

Идея решения:



Как быстро посчитать этот минимум? Это минимум из времени входа (синее число), времён входа в соседей (чёрное ребро, синее число) и ответов в поддеревьях (красная стрелка, красное число).

Вопросы?

Вопросы?