

# Динамическое программирование

Борис Золотов (Б06)

Иван Казменко (Б01, Б05)

Владислав Макаров (Б02, Б03)

Вячеслав Соколов (Б09)

Арина Филимонова (Б10)

Санкт-Петербургский Государственный Университет

Вторник, 7 ноября 2023 года

# Содержание

## 1 Одномерные задачи

- Числа Фибоначчи
- Лестница
- Динамика и индукция
- Анти-лестница
- Кузнечик
- Восстановление ответа

## 2 Двумерные задачи

- Число сочетаний
- Наибольшая общая подпоследовательность
- Редакционное расстояние
- Строка и шаблон
- Наибольшая возрастающая подпоследовательность

# Содержание

## 1 Одномерные задачи

- Числа Фибоначчи
- Лестница
- Динамика и индукция
- Анти-лестница
- Кузнечик
- Восстановление ответа

## 2 Двумерные задачи

- Число сочетаний
- Наибольшая общая подпоследовательность
- Редакционное расстояние
- Строка и шаблон
- Наибольшая возрастающая подпоследовательность

# Числа Фибоначчи

Определение:  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$ ,  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  при  $n \geq 2$ .

Задача: дано  $n$ , вычислите  $F_n$ .

# Числа Фибоначчи

C++, рекурсия:

```
1  #include <iostream>
2  using namespace std;
3
4
5
6
7  int fib (int n) {
8      if (n < 2) return n;
9      return fib (n - 1) + fib (n - 2);
10 }
11
12
13
14 int main () {
15     int n;
16     while (cin >> n)
17         cout << fib (n) << endl;
18     return 0;
19 }
```

ВВОД:

5  
30  
40  
45

ВЫВОД:

5  
832040  
102334155  
1134903170

# Числа Фибоначчи

C++, рекурсия:

```
1  #include <iostream>
2  using namespace std;
3
4
5
6
7  int fib (int n) {
8      if (n < 2) return n;
9      return fib (n - 1) + fib (n - 2);
10 }
11
12
13
14 int main () {
15     int n;
16     while (cin >> n)
17         cout << fib (n) << endl;
18     return 0;
19 }
```

Пример  $n = 5$ :

- $5 \rightarrow 4, 3$
- $\cdot 4 \rightarrow 3, 2$
- $\cdot\cdot 3 \rightarrow 2, 1$
- $\cdot\cdot\cdot 2 \rightarrow 1, 0$
- $\cdot\cdot\cdot\cdot 1$
- $\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot 0$
- $\cdot\cdot\cdot 1$
- $\cdot\cdot 2 \rightarrow 1, 0$
- $\cdot\cdot\cdot 1$
- $\cdot\cdot\cdot 0$
- $\cdot 3 \rightarrow 2, 1$
- $\cdot\cdot 2 \rightarrow 1, 0$
- $\cdot\cdot\cdot 1$
- $\cdot\cdot\cdot\cdot 0$
- $\cdot\cdot 1$

# Числа Фибоначчи

C++, рекурсия с запоминанием ( мемоизация):

```
1  #include <iostream>
2  using namespace std;
3
4  int f [99];
5
6  int fib (int n) {
7      if (f[n] == 0) {
8          if (n < 2) f[n] = n;
9          else f[n] = fib (n - 1) + fib (n - 2);
10     }
11     return f[n];
12 }
13
14 int main () {
15     int n;
16     while (cin >> n)
17         cout << fib (n) << endl;
18     return 0;
19 }
```

ВВОД:

5  
30  
40  
45

ВЫВОД:

5  
832040  
102334155  
1134903170

# Числа Фибоначчи

C++, рекурсия с запоминанием ( мемоизация):

```
1  #include <iostream>
2  using namespace std;
3
4  int f [99];
5
6  int fib (int n) {
7      if (f[n] == 0) {
8          if (n < 2) f[n] = n;
9          else f[n] = fib (n - 1) + fib (n - 2);
10     }
11     return f[n];
12 }
13
14 int main () {
15     int n;
16     while (cin >> n)
17         cout << fib (n) << endl;
18     return 0;
19 }
```

Пример  $n = 5$ :

- $5 \rightarrow 4, 3$
- $. 4 \rightarrow 3, 2$
- $.. 3 \rightarrow 2, 1$
- $... 2 \rightarrow 1, 0$
- $.... 1$
- $..... 0$
- $... 1$  запомнено
- $.. 2$  запомнено
- $. 3$  запомнено

# Числа Фибоначчи

C++, итеративное решение:

```
1  #include <iostream>
2  using namespace std;
3
4  int main () {
5      int f [99];
6      f[0] = 0;
7      f[1] = 1;
8      for (int i = 2; i < 99 /*???*/; i++)
9          f[i] = f[i - 1] + f[i - 2];
10     int n;
11     while (cin >> n)
12         cout << f[n] << endl;
13     return 0;
14 }
```

ВВОД:

5  
30  
40  
45

ВЫВОД:

5  
832040  
102334155  
1134903170

# Числа Фибоначчи

Python, рекурсия:

```
1 import sys
2
3
4 def fib (n):
5     if n < 2:
6         return n
7     return fib (n - 1) + fib (n - 2)
8
9 for line in sys.stdin:
10     n = int (line)
11     print (fib (n))
```

ВВОД:

```
5
30
40
45
```

ВЫВОД:

```
5
832040
102334155
1134903170
```

# Числа Фибоначчи

Python, рекурсия с запоминанием ( мемоизация):

```
1  import functools, sys
2
3  @functools.lru_cache (maxsize = None)
4  def fib (n):
5      if n < 2:
6          return n
7      return fib (n - 1) + fib (n - 2)
8
9  for line in sys.stdin:
10     n = int (line)
11     print (fib (n))
```

ВВОД:

5  
30  
40  
45

ВЫВОД:

5  
832040  
102334155  
1134903170

# Числа Фибоначчи

D, рекурсия:

```
1  import std;
2
3
4  int fib (int n) {
5      if (n < 2) return n;
6      return fib (n - 1) + fib (n - 2);
7  }
8
9  void main () {
10     foreach (line; stdin.byLine) {
11         auto n = line.to !(int);
12         writeln (fib (n));
13     }
14 }
```

ВВОД:

```
5
30
40
45
```

ВЫВОД:

```
5
832040
102334155
1134903170
```

# Числа Фибоначчи

D, рекурсия с запоминанием ( мемоизация):

```
1  import std;
2
3  alias fib = memoize !(fibImpl);
4  int fibImpl (int n) {
5      if (n < 2) return n;
6      return fib (n - 1) + fib (n - 2);
7  }
8
9  void main () {
10     foreach (line; stdin.byLine) {
11         auto n = line.to !(int);
12         writeln (fib (n));
13     }
14 }
```

ВВОД:

```
5
30
40
45
```

ВЫВОД:

```
5
832040
102334155
1134903170
```

# Содержание

## 1 Одномерные задачи

- Числа Фибоначчи
- Лестница
- Динамика и индукция
- Анти-лестница
- Кузнечик
- Восстановление ответа

## 2 Двумерные задачи

- Число сочетаний
- Наибольшая общая подпоследовательность
- Редакционное расстояние
- Строка и шаблон
- Наибольшая возрастающая подпоследовательность

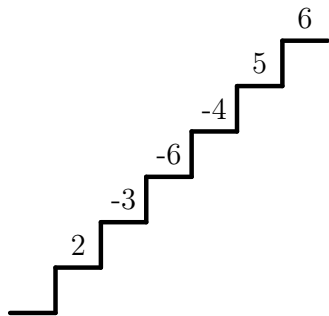
# Лестница

- Есть лестница из  $n$  ступенек.
- Мы начинаем у подножия лестницы, на нулевой ступеньке.
- На ступеньках написаны числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .
- Мы должны оказаться на  $n$ -й ступеньке.
- За один шаг мы поднимаемся либо на одну, либо на две ступеньки.
- Наши баллы – сумма чисел, на которые мы шагнули.
- Как подняться по лестнице, чтобы максимизировать баллы?

# Лестница

- Есть лестница из  $n$  ступенек.
- Мы начинаем у подножия лестницы, на нулевой ступеньке.
- На ступеньках написаны числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .
- Мы должны оказаться на  $n$ -й ступеньке.
- За один шаг мы поднимаемся либо на одну, либо на две ступеньки.
- Наши баллы – сумма чисел, на которые мы шагнули.
- Как подняться по лестнице, чтобы максимизировать баллы?

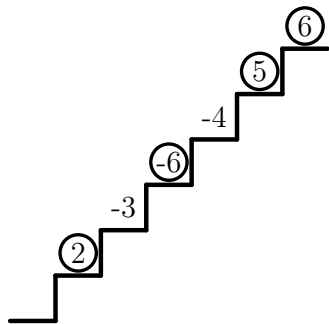
Пример 1:



# Лестница

- Есть лестница из  $n$  ступенек.
- Мы начинаем у подножия лестницы, на нулевой ступеньке.
- На ступеньках написаны числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .
- Мы должны оказаться на  $n$ -й ступеньке.
- За один шаг мы поднимаемся либо на одну, либо на две ступеньки.
- Наши баллы – сумма чисел, на которые мы шагнули.
- Как подняться по лестнице, чтобы максимизировать баллы?

Пример 1, решение:



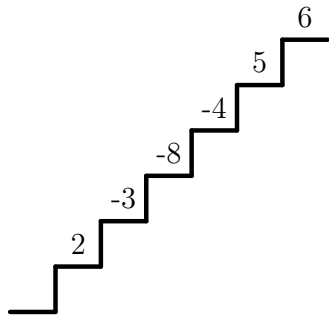
Ответ:

$$2 + (-6) + 5 + 6 = 7.$$

# Лестница

- Есть лестница из  $n$  ступенек.
- Мы начинаем у подножия лестницы, на нулевой ступеньке.
- На ступеньках написаны числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .
- Мы должны оказаться на  $n$ -й ступеньке.
- За один шаг мы поднимаемся либо на одну, либо на две ступеньки.
- Наши баллы – сумма чисел, на которые мы шагнули.
- Как подняться по лестнице, чтобы максимизировать баллы?

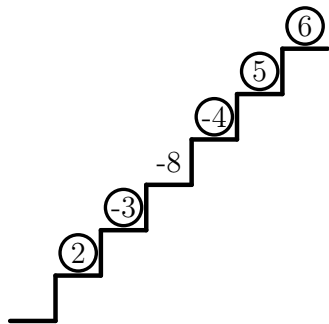
Пример 2:



# Лестница

- Есть лестница из  $n$  ступенек.
- Мы начинаем у подножия лестницы, на нулевой ступеньке.
- На ступеньках написаны числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .
- Мы должны оказаться на  $n$ -й ступеньке.
- За один шаг мы поднимаемся либо на одну, либо на две ступеньки.
- Наши баллы – сумма чисел, на которые мы шагнули.
- Как подняться по лестнице, чтобы максимизировать баллы?

Пример 2, решение:



Ответ:

$$2 + (-3) + (-4) + 5 + 6 = 6.$$

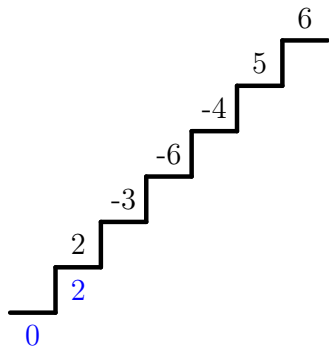
# Лестница, решение

- Давайте решать более общую задачу.
- Для каждого  $k$  от 0 до  $n$ :
- Как подняться на  $k$ -ю ступеньку, чтобы максимизировать баллы?

# Лестница, решение

- Давайте решать более общую задачу.
- Для каждого  $k$  от 0 до  $n$ :
- Как подняться на  $k$ -ю ступеньку, чтобы максимизировать баллы?
- Назовём это значение  $f(k)$ .
- База:  $f(0) = 0$ .
- База:  $f(1) = a_1$ .

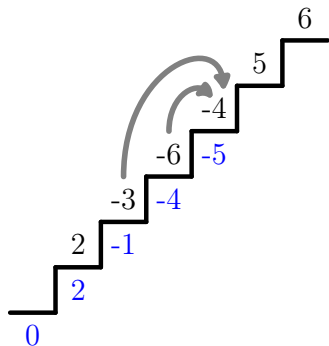
Пример 1:



# Лестница, решение

- Давайте решать более общую задачу.
- Для каждого  $k$  от 0 до  $n$ :
- Как подняться на  $k$ -ю ступеньку, чтобы максимизировать баллы?
- Назовём это значение  $f(k)$ .
- База:  $f(0) = 0$ .
- База:  $f(1) = a_1$ .
- Пусть мы уже нашли  $f(k')$  для всех  $k' < k$ .
- Как подняться на  $k$ -ю ступеньку?
- Мы пришли либо с  $k - 1$ -й ступеньки, либо с  $k - 2$ -й ступеньки.

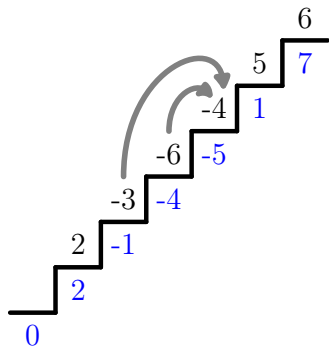
Пример 1,  $k = 4$ :



# Лестница, решение

- Давайте решать более общую задачу.
- Для каждого  $k$  от 0 до  $n$ :
- Как подняться на  $k$ -ю ступеньку, чтобы максимизировать баллы?
- Назовём это значение  $f(k)$ .
- База:  $f(0) = 0$ .
- База:  $f(1) = a_1$ .
- Пусть мы уже нашли  $f(k')$  для всех  $k' < k$ .
- Как подняться на  $k$ -ю ступеньку?
- Мы пришли либо с  $k - 1$ -й ступеньки, либо с  $k - 2$ -й ступеньки.

Пример 1,  $k = 4$ :



$$f(k) = a_k + \max(f(k-1), f(k-2))$$

# Лестница, код

Рекурсия:

```
1  #include <algorithm>
2  #include <iostream>
3  using namespace std;
4
5  int a [10001];
6
7
8  int f (int n) {
9      if (n == 0) return 0;
10     if (n == 1) return a[1];
11
12     return a[n] + max (f (n - 1), f (n - 2));
13 }
14
15
16 int main () {
17     int n;  cin >> n;
18     for (int i = 1; i <= n; i++)  cin >> a[i];
19
20     cout << f (n) << endl;
21     return 0;
22 }
```

# Лестница, код

Рекурсия с запоминанием (мемоизация):

```
1  #include <algorithm>
2  #include <iostream>
3  using namespace std;
4
5  int a [10001];
6  int mf [10001];
7
8  int f (int n) {
9      if (n == 0) return 0;
10     if (n == 1) return a[1];
11     if (mf[n] == INT_MAX)
12         mf[n] = a[n] + max (f (n - 1), f (n - 2));
13     return mf[n];
14 }
15
16 int main () {
17     int n;  cin >> n;
18     for (int i = 1; i <= n; i++)  cin >> a[i];
19     for (int i = 0; i <= n; i++)  mf[i] = INT_MAX;
20     cout << f (n) << endl;
21     return 0;
22 }
```

# Лестница, код

Итеративное решение:

```
1  #include <algorithm>
2  #include <iostream>
3  using namespace std;
4
5  int a [10001];
6  int f [10001];
7
8  int main () {
9      int n;  cin >> n;
10     for (int i = 1; i <= n; i++)  cin >> a[i];
11     f[0] = 0;
12     f[1] = a[1];
13     for (int i = 2; i <= n; i++)
14         f[i] = a[i] + max (f[i - 1], f[i - 2]);
15     cout << f[n] << endl;
16     return 0;
17 }
```

# Содержание

## 1 Одномерные задачи

- Числа Фибоначчи
- Лестница
- **Динамика и индукция**
- Анти-лестница
- Кузнечик
- Восстановление ответа

## 2 Двумерные задачи

- Число сочетаний
- Наибольшая общая подпоследовательность
- Редакционное расстояние
- Строка и шаблон
- Наибольшая возрастающая подпоследовательность

# Динамика и индукция

Динамическое программирование:

- Найдём  $f(n)$ .
- База:  $f(0) = 0, f(1) = a_1$ .
- Предположение: пусть  $f(k')$  уже найдены для всех  $k' < k$ .
- Переход: тогда  $f(k) = a_k + \max(f(k-1), f(k-2))$ .
- Ответ:  $f(n)$ .

Математическая индукция:

- Докажем, что  $f(n)$  посчитано верно.
- База:  $f(0) = 0, f(1) = a_1$ .
- Предположение: пусть  $f(k')$  уже посчитаны верно для всех  $k' < k$ .
- Переход: тогда  $f(k) = a_k + \max(f(k-1), f(k-2))$  тоже посчитано верно.
- Значит,  $f(n)$  посчитано верно.

# Динамика и индукция

Динамическое программирование:

- Найдём  $f(n)$ .
- База:  $f(0) = 0, f(1) = a_1$ .
- Предположение: пусть  $f(k')$  уже найдены для всех  $k' < k$ .
- Переход: тогда  $f(k) = a_k + \max(f(k-1), f(k-2))$ .
- Ответ:  $f(n)$ .

Математическая индукция:

- Докажем, что  $f(n)$  посчитано верно.
- База:  $f(0) = 0, f(1) = a_1$ .
- Предположение: пусть  $f(k')$  уже посчитаны верно для всех  $k' < k$ .
- Переход: тогда  $f(k) = a_k + \max(f(k-1), f(k-2))$  тоже посчитано верно.
- Значит,  $f(n)$  посчитано верно.

# Динамика и индукция

Динамическое программирование:

- Найдём  $f(n)$ .
- База:  $f(0) = 0, f(1) = a_1$ .
- Предположение: пусть  $f(k')$  уже найдены для всех  $k' < k$ .
- Переход: тогда  $f(k) = a_k + \max(f(k-1), f(k-2))$ .
- Ответ:  $f(n)$ .

Математическая индукция:

- Докажем, что  $f(n)$  посчитано верно.
- База:  $f(0) = 0, f(1) = a_1$ .
- Предположение: пусть  $f(k')$  уже посчитаны верно для всех  $k' < k$ .
- Переход: тогда  $f(k) = a_k + \max(f(k-1), f(k-2))$  тоже посчитано верно.
- Значит,  $f(n)$  посчитано верно.

# Динамика и индукция

Динамическое программирование:

- Найдём  $f(n)$ .
- База:  $f(0) = 0, f(1) = a_1$ .
- Предположение: пусть  $f(k')$  уже найдены для всех  $k' < k$ .
- Переход: тогда  $f(k) = a_k + \max(f(k-1), f(k-2))$ .
- Ответ:  $f(n)$ .

Математическая индукция:

- Докажем, что  $f(n)$  посчитано верно.
- База:  $f(0) = 0, f(1) = a_1$ .
- Предположение: пусть  $f(k')$  уже посчитаны верно для всех  $k' < k$ .
- Переход: тогда  $f(k) = a_k + \max(f(k-1), f(k-2))$  тоже посчитано верно.
- Значит,  $f(n)$  посчитано верно.

# Динамика и индукция

Динамическое программирование:

- Найдём  $f(n)$ .
- База:  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = a_1$ .
- Предположение: пусть  $f(k')$  уже найдены для всех  $k' < k$ .
- Переход: тогда  $f(k) = a_k + \max(f(k-1), f(k-2))$ .
- Ответ:  $f(n)$ .

Математическая индукция:

- Докажем, что  $f(n)$  посчитано верно.
- База:  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = a_1$ .
- Предположение: пусть  $f(k')$  уже посчитаны верно для всех  $k' < k$ .
- Переход: тогда  $f(k) = a_k + \max(f(k-1), f(k-2))$  тоже посчитано верно.
- Значит,  $f(n)$  посчитано верно.

# Содержание

## 1 Одномерные задачи

- Числа Фибоначчи
- Лестница
- Динамика и индукция
- **Анти-лестница**
- Кузнечик
- Восстановление ответа

## 2 Двумерные задачи

- Число сочетаний
- Наибольшая общая подпоследовательность
- Редакционное расстояние
- Строка и шаблон
- Наибольшая возрастающая подпоследовательность

# Анти-лестница

- Есть последовательность из  $n$  чисел:  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .
- Мы хотим выбрать подпоследовательность.
- При этом нельзя выбирать два соседних элемента.
- Как максимизировать сумму выбранных чисел?

# Анти-лестница

- Есть последовательность из  $n$  чисел:  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .
- Мы хотим выбрать подпоследовательность.
- При этом нельзя выбирать два соседних элемента.
- Как максимизировать сумму выбранных чисел?

Пример 1:

1	3	4	-6	-7	8	3	4	6
---	---	---	----	----	---	---	---	---

# Анти-лестница

- Есть последовательность из  $n$  чисел:  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .
- Мы хотим выбрать подпоследовательность.
- При этом нельзя выбирать два соседних элемента.
- Как максимизировать сумму выбранных чисел?

Пример 1, решение:



Ответ:  $1 + 4 + 8 + 6 = 19$ .

# Анти-лестница

- Есть последовательность из  $n$  чисел:  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .
- Мы хотим выбрать подпоследовательность.
- При этом нельзя выбирать два соседних элемента.
- Как максимизировать сумму выбранных чисел?

Пример 2:

1	7	4	-6	-7	8	3	4	6
---	---	---	----	----	---	---	---	---

## Анти-лестница

- Есть последовательность из  $n$  чисел:  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .
- Мы хотим выбрать подпоследовательность.
- При этом нельзя выбирать два соседних элемента.
- Как максимизировать сумму выбранных чисел?

Пример 2, решение:



Ответ:  $7 + 8 + 6 = 21$ .

# Анти-лестница, решение 1

- Давайте решать более общую задачу.
- Для каждого  $k$  от 0 до  $n$ :
- Пусть мы взяли  $k$ -е число последним.
- Как при этом максимизировать сумму?

Пример 1:

1	3	4	-6	-7	8	3	4	6
---	---	---	----	----	---	---	---	---

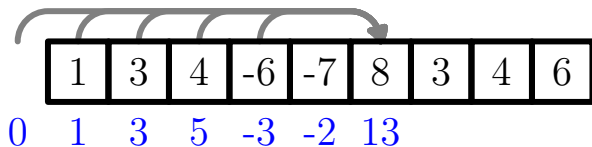
0 1

- Назовём это значение  $f(k)$ .
- База: пусть  $f(0) = 0$ .
- База:  $f(1) = a_1$ .

# Анти-лестница, решение 1

- Давайте решать более общую задачу.
- Для каждого  $k$  от 0 до  $n$ :
- Пусть мы взяли  $k$ -е число последним.
- Как при этом максимизировать сумму?

Пример 1:

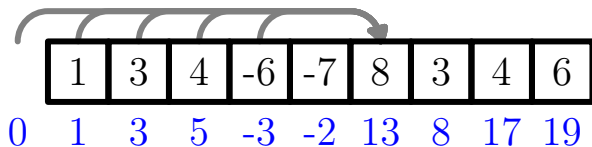


- Пусть мы уже нашли  $f(k')$  для всех  $k' < k$ .
- Как посчитать  $f(k)$ ?
- Предыдущим мы могли взять  $k - 2$ -е число, или  $k - 3$ -е, ..., или первое, или нулевое (то есть ничего не взять).

# Анти-лестница, решение 1

- Давайте решать более общую задачу.
- Для каждого  $k$  от 0 до  $n$ :
- Пусть мы взяли  $k$ -е число последним.
- Как при этом максимизировать сумму?

Пример 1:



- Получается  $f(k) = a_k + \max(f(k-2), f(k-3), \dots, f(1), f(0))$ .
- Ответ — это  $\max(f(0), f(1), \dots, f(n))$ .
- Решение работает за  $O(n^2)$ .

## Анти-лестница, решение 2

- Давайте решать другую более общую задачу.
- Для каждого  $k$  от 0 до  $n$ :
- Рассмотрим префикс последовательности:  $a_1, a_2, \dots, a_k$ .
- Как при этом максимизировать сумму?

Пример 1:

1	3	4	-6	-7	8	3	4	6
---	---	---	----	----	---	---	---	---

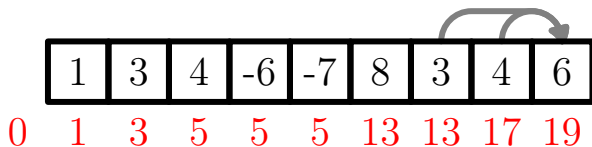
0 1

- Назовём это значение  $g(k)$ .
- База:  $g(0) = 0$ .
- База:  $g(1) = \max(0, a_1)$ .

## Анти-лестница, решение 2

- Давайте решать другую более общую задачу.
- Для каждого  $k$  от 0 до  $n$ :
- Рассмотрим префикс последовательности:  $a_1, a_2, \dots, a_k$ .
- Как при этом максимизировать сумму?

Пример 1:



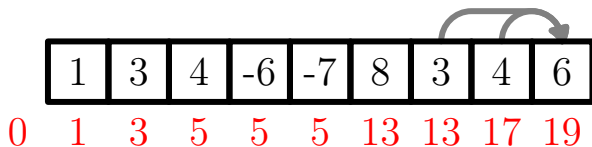
Как найти  $g(k)$ , если мы уже знаем  $g(k')$  для всех  $k' < k$ ?

- Мы можем не брать  $a_k$ , тогда возьмём ответ из  $g(k-1)$ .
- Мы можем взять  $a_k$ , тогда добавим ответ из  $g(k-2)$ .

## Анти-лестница, решение 2

- Давайте решать другую более общую задачу.
- Для каждого  $k$  от 0 до  $n$ :
- Рассмотрим префикс последовательности:  $a_1, a_2, \dots, a_k$ .
- Как при этом максимизировать сумму?

Пример 1:



- Получается  $g(k) = \max(g(k-1), a_k + g(k-2))$ .
- Ответ — это  $g(n)$ .
- Решение работает за  $O(n)$ .

# Содержание

## 1 Одномерные задачи

- Числа Фибоначчи
- Лестница
- Динамика и индукция
- Анти-лестница
- **Кузнечик**
- Восстановление ответа

## 2 Двумерные задачи

- Число сочетаний
- Наибольшая общая подпоследовательность
- Редакционное расстояние
- Строка и шаблон
- Наибольшая возрастающая подпоследовательность

# Кузнечик — может или нет

- Есть лента из клеток, по которой прыгает кузнечик.
- Он начинает в клетке 1.
- Из любой клетки  $x$  он может прыгнуть в клетки  $x + a$ ,  $x + b$  и  $x + c$ .
- Пример:  $a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $c = 5$ .
- Может ли кузнечик добраться до клетки  $n$ ?

# Кузнечик — может или нет

- Есть лента из клеток, по которой прыгает кузнечик.
- Он начинает в клетке 1.
- Из любой клетки  $x$  он может прыгнуть в клетки  $x + a$ ,  $x + b$  и  $x + c$ .
- Пример:  $a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $c = 5$ .
- Может ли кузнечик добраться до клетки  $n$ ?

Обобщим задачу: для каждой клетки  $k$  выясним, может ли кузнечик до неё добраться.

- База:  $f(1) = \text{true}$ .
- Пересчёт:  $f(k) = f(k - a) \vee f(k - b) \vee f(k - c)$ .

# Кузнечик — может или нет

- Есть лента из клеток, по которой прыгает кузнечик.
- Он начинает в клетке 1.
- Из любой клетки  $x$  он может прыгнуть в клетки  $x + a$ ,  $x + b$  и  $x + c$ .
- Пример:  $a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $c = 5$ .
- Может ли кузнечик добраться до клетки  $n$ ?

Псевдокод:

```
f[1] := true
for k := 2, ..., n:
    f[k] := false
    if k > a and f[k - a]: f[k] := true
    if k > b and f[k - b]: f[k] := true
    if k > c and f[k - c]: f[k] := true
```

# Кузнечик — как можно быстрее

- Есть лента из клеток, по которой прыгает кузнечик.
- Он начинает в клетке 1.
- Из любой клетки  $x$  он может прыгнуть в клетки  $x + a$ ,  $x + b$  и  $x + c$ .
- **За какое минимальное число прыжков** кузнечик может добраться до клетки  $n$ ?

# Кузнечик — как можно быстрее

- Есть лента из клеток, по которой прыгает кузнечик.
- Он начинает в клетке 1.
- Из любой клетки  $x$  он может прыгнуть в клетки  $x + a$ ,  $x + b$  и  $x + c$ .
- За какое минимальное число прыжков кузнечик может добраться до клетки  $n$ ?

Обобщим задачу: для каждой клетки  $k$  выясним, за какое минимальное число прыжков кузнечик может до неё добраться.

- База:  $f(1) = 0$ .
- Пересчёт:  $f(k) = 1 + \min(f(k - a), f(k - b), f(k - c))$ .

# Кузнечик — как можно быстрее

- Есть лента из клеток, по которой прыгает кузнечик.
- Он начинает в клетке 1.
- Из любой клетки  $x$  он может прыгнуть в клетки  $x + a$ ,  $x + b$  и  $x + c$ .
- За какое минимальное число прыжков кузнечик может добраться до клетки  $n$ ?

Псевдокод:

```
f[1] := 0
for k := 2, ..., n:
    f[k] := infinity
    if k > a: f[k] := min (f[k], 1 + f[k - a])
    if k > b: f[k] := min (f[k], 1 + f[k - b])
    if k > c: f[k] := min (f[k], 1 + f[k - c])
```

# Кузнечик — ямы

- Есть лента из клеток, по которой прыгает кузнечик.
- Он начинает в клетке 1.
- Из любой клетки  $x$  он может прыгнуть в клетки  $x + a$ ,  $x + b$  и  $x + c$ .
- В некоторых клетках — ямы, туда попадать нельзя.
- За какое минимальное число прыжков кузнечик может добраться до клетки  $n$ ?

# Кузнечик — ямы

- В некоторых клетках — ямы, туда попадать нельзя.
- За какое минимальное число прыжков кузнечик может добраться до клетки  $n$ ?

Обобщим задачу: для каждой клетки  $k$  выясним, за какое минимальное число прыжков кузнечик может до неё добраться.

- База:  $f(1) = 0$ .
- Пересчёт:  $f(k) = 1 + \min(f(k - a), f(k - b), f(k - c))$ .
- Если  $h_k = \text{true}$  (hole, яма в клетке  $k$ ), то пусть  $f(k) = \infty$ .

# Кузнечик — ямы

- В некоторых клетках — ямы, туда попадать нельзя.
- За какое минимальное число прыжков кузнечик может добраться до клетки  $n$ ?

Псевдокод:

```
f[1] := 0
for k := 2, ..., n:
  f[k] := infinity
  if not h[k]:
    if k > a: f[k] := min (f[k], 1 + f[k - a])
    if k > b: f[k] := min (f[k], 1 + f[k - b])
    if k > c: f[k] := min (f[k], 1 + f[k - c])
```

# Кузнечик — сок

- Есть лента из клеток, по которой прыгает кузнечик.
- Он начинает в клетке 1.
- Из любой клетки  $x$  он может прыгнуть в клетки  $x + a$ ,  $x + b$  и  $x + c$ .
- В некоторых клетках — ямы, туда попадать нельзя.
- В каждой клетке есть неотрицательное количество сока.
- За какое минимальное число прыжков кузнечик может добраться до клетки  $n$ ?
- Из всех таких маршрутов выберите тот, на котором кузнечик соберёт как можно больше сока.

# Кузнечик — сок

- В некоторых клетках — ямы, туда попадать нельзя.
- В каждой клетке есть неотрицательное количество сока.
- За какое минимальное число прыжков кузнечик может добраться до клетки  $n$ ?
- Из всех таких маршрутов выберите тот, на котором кузнечик соберёт как можно больше сока.

Обобщим задачу. Для каждой клетки  $k$  найдём пару: минимальное количество прыжков до неё, максимальное количество сока при таком количестве прыжков.

- База:  $f(1) = \{0, j_1\}$ ; пусть  $j_k$  (juice) — количество сока в клетке  $k$ .
- Пересчёт:  $f(k) = \{1, j_k\} + \text{best}(f(k-a), f(k-b), f(k-c))$ .
- Если  $h_k = \text{true}$  (hole, яма в клетке  $k$ ), то пусть  $f(k) = \{\infty, 0\}$ .

# Кузнечик — сок

- В некоторых клетках — ямы, туда попадать нельзя.
- В каждой клетке есть неотрицательное количество сока.
- За какое минимальное число прыжков кузнечик может добраться до клетки  $n$ ?
- Из всех таких маршрутов выберите тот, на котором кузнечик соберёт как можно больше сока.

Псевдокод:

```
f[1] := {0, -j[1]}
for k := 2, ..., n:
  f[k] := {infinity, 0}
  if not h[k]:
    if k > a: f[k] := min (f[k], {1, -j[k]} + f[k - a])
    if k > b: f[k] := min (f[k], {1, -j[k]} + f[k - b])
    if k > c: f[k] := min (f[k], {1, -j[k]} + f[k - c])
```

# Содержание

## 1 Одномерные задачи

- Числа Фибоначчи
- Лестница
- Динамика и индукция
- Анти-лестница
- Кузнечик
- Восстановление ответа

## 2 Двумерные задачи

- Число сочетаний
- Наибольшая общая подпоследовательность
- Редакционное расстояние
- Строка и шаблон
- Наибольшая возрастающая подпоследовательность

# Восстановление ответа

- Есть лента из клеток, по которой прыгает кузнечик.
- Он начинает в клетке 1.
- Из любой клетки  $x$  он может прыгнуть в клетки  $x + a$ ,  $x + b$  и  $x + c$ .
- В некоторых клетках — ямы, туда попадать нельзя.
- За какое минимальное число прыжков кузнечик может добраться до клетки  $n$ ?
- Как именно нужно прыгать кузнечику для этого?

## Восстановление ответа

- В некоторых клетках — ямы, туда попадать нельзя.
- За какое минимальное число прыжков кузнечик может добраться до клетки  $n$ ?
- Как именно нужно прыгать кузнечику для этого?

Обобщим задачу: для каждой клетки  $k$  выясним, за какое минимальное число прыжков кузнечик может до неё добраться.

- База:  $f(1) = 0$ .
- Пересчёт:  $f(k) = 1 + \min(f(k - a), f(k - b), f(k - c))$ .

# Восстановление ответа

- В некоторых клетках — ямы, туда попадать нельзя.
- За какое минимальное число прыжков кузнечик может добраться до клетки  $n$ ?
- Как именно нужно прыгать кузнечику для этого?

Псевдокод:

```
f[1] := 0
for k := 2, ..., n:
  f[k] := infinity
  if not h[k]:
    if k > a: f[k] := min (f[k], 1 + f[k - a])
    if k > b: f[k] := min (f[k], 1 + f[k - b])
    if k > c: f[k] := min (f[k], 1 + f[k - c])
```

## Восстановление ответа — обратные рёбра

Будем восстанавливать путь с конца: стоя в клетке  $x$ , смотреть, из какой клетки могло получиться значение  $f(x)$ .

# Восстановление ответа — обратные рёбра

Будем восстанавливать путь с конца: стоя в клетке  $x$ , смотреть, из какой клетки могло получиться значение  $f(x)$ .



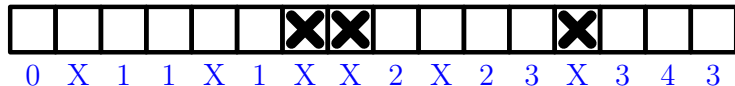
Псевдокод:

```

x := n
steps.add (x)
while x > 1:
    if x > a and f[x] = 1 + f[x - a]: x -= a
    else if x > b and f[x] = 1 + f[x - b]: x -= b
    else if x > c and f[x] = 1 + f[x - c]: x -= c
    steps.add (x)
reverse (steps)
  
```

# Восстановление ответа — обратные рёбра

Будем восстанавливать путь с конца: стоя в клетке  $x$ , смотреть, из какой клетки могло получиться значение  $f(x)$ .



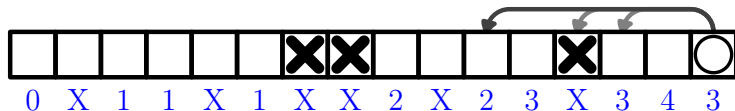
Псевдокод:

```

x := n
steps.add (x)
while x > 1:
    if x > a and f[x] = 1 + f[x - a]: x -= a
    else if x > b and f[x] = 1 + f[x - b]: x -= b
    else if x > c and f[x] = 1 + f[x - c]: x -= c
    steps.add (x)
reverse (steps)
  
```

# Восстановление ответа — обратные рёбра

Будем восстанавливать путь с конца: стоя в клетке  $x$ , смотреть, из какой клетки могло получиться значение  $f(x)$ .



Псевдокод:

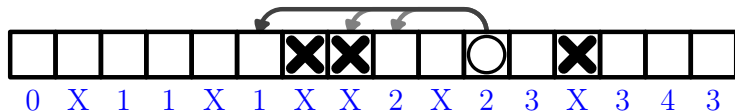
```

x := n
steps.add (x)
while x > 1:
    if x > a and f[x] = 1 + f[x - a]: x -= a
    else if x > b and f[x] = 1 + f[x - b]: x -= b
    else if x > c and f[x] = 1 + f[x - c]: x -= c
    steps.add (x)
reverse (steps)

```

# Восстановление ответа — обратные рёбра

Будем восстанавливать путь с конца: стоя в клетке  $x$ , смотреть, из какой клетки могло получиться значение  $f(x)$ .



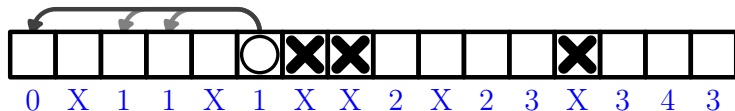
Псевдокод:

```

x := n
steps.add (x)
while x > 1:
    if x > a and f[x] = 1 + f[x - a]: x -= a
    else if x > b and f[x] = 1 + f[x - b]: x -= b
    else if x > c and f[x] = 1 + f[x - c]: x -= c
    steps.add (x)
reverse (steps)
  
```

# Восстановление ответа — обратные рёбра

Будем восстанавливать путь с конца: стоя в клетке  $x$ , смотреть, из какой клетки могло получиться значение  $f(x)$ .



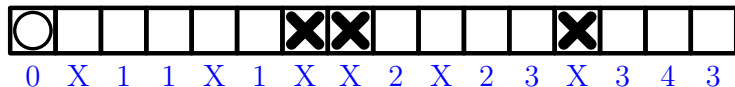
Псевдокод:

```

x := n
steps.add (x)
while x > 1:
    if x > a and f[x] = 1 + f[x - a]: x -= a
    else if x > b and f[x] = 1 + f[x - b]: x -= b
    else if x > c and f[x] = 1 + f[x - c]: x -= c
    steps.add (x)
reverse (steps)
  
```

# Восстановление ответа — обратные рёбра

Будем восстанавливать путь с конца: стоя в клетке  $x$ , смотреть, из какой клетки могло получиться значение  $f(x)$ .



Псевдокод:

```

x := n
steps.add (x)
while x > 1:
    if x > a and f[x] = 1 + f[x - a]: x -= a
    else if x > b and f[x] = 1 + f[x - b]: x -= b
    else if x > c and f[x] = 1 + f[x - c]: x -= c
    steps.add (x)
reverse (steps)

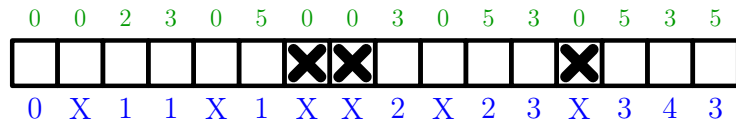
```

## Восстановление ответа — хранение предков

Для каждой клетки  $k$  не только выясним, за какое минимальное число прыжков кузнечик может до неё добраться, но и запомним, каким прыжком он туда попал.

## Восстановление ответа — хранение предков

Для каждой клетки  $k$  не только выясним, за какое минимальное число прыжков кузнечик может до неё добраться, но и заппомним, каким прыжком он туда попал.



Псевдокод:

```

f[1] := 0
for k := 2, ..., n:
  f[k] := infinity
  if not h[k]:
    if k > a and f[k] > 1 + f[k - a]:
      p[k] := a, f[k] := 1 + f[k - a]
    if k > b and f[k] > 1 + f[k - b]:
      p[k] := b, f[k] := 1 + f[k - b]
    if k > c and f[k] > 1 + f[k - c]:
      p[k] := c, f[k] := 1 + f[k - c]
  
```

## Восстановление ответа — хранение предков

Для каждой клетки  $k$  не только выясним, за какое минимальное число прыжков кузнечик может до неё добраться, но и заппомним, каким прыжком он туда попал.

0	0	2	3	0	5	0	0	3	0	5	3	0	5	3	5
○					○	✕	✕			○		✕			○
0	X	1	1	X	1	X	X	2	X	2	3	X	3	4	3

Будем восстанавливать путь с конца: стоя в клетке  $x$ , сдвигаться назад на величину прыжка  $p_x$ .

Псевдокод:

```

x := n
steps.add (x)
while x > 1:
    x -= p[x]
    steps.add (x)
reverse (steps)
  
```

# Содержание

## 1 Одномерные задачи

- Числа Фибоначчи
- Лестница
- Динамика и индукция
- Анти-лестница
- Кузнечик
- Восстановление ответа

## 2 Двумерные задачи

- **Число сочетаний**
- Наибольшая общая подпоследовательность
- Редакционное расстояние
- Строка и шаблон
- Наибольшая возрастающая подпоследовательность

# Число сочетаний

Постановка задачи:

- Есть  $n$  различных объектов.
- Выбираем из них  $k$  различных (порядок не важен).
- Сколько способов это сделать? Обозначим как  $C_n^k$ .

Объекты можно просто пронумеровать числами от 1 до  $n$ .

Пример:  $n = 4$ ,  $k = 2$ . Получаем  $C_4^2 = 6$ .

1	2	3	4	Сочетание
1	2	3	4	1, 2
1	2	3	4	1, 3
1	2	3	4	1, 4
1	2	3	4	2, 3
1	2	3	4	2, 4
1	2	3	4	3, 4

# Число сочетаний

Постановка задачи:

- Есть  $n$  различных объектов.
- Выбираем из них  $k$  различных (порядок не важен).
- Сколько способов это сделать? Обозначим как  $C_n^k$ .

Объекты можно просто пронумеровать числами от 1 до  $n$ .

Пример:  $n = 4$ ,  $k = 2$ . Получаем  $C_4^2 = 6$ .

1	2	3	4	Сочетание
1	2	3	4	1, 2
1	2	3	4	1, 3
1	2	3	4	1, 4
1	2	3	4	2, 3
1	2	3	4	2, 4
1	2	3	4	3, 4

# Число сочетаний

Вычисление  $C_n^k$  – комбинаторное решение:

- Выбираем первый объект  $n$  способами.
- Выбираем второй объект из оставшихся  $n - 1$  способом.
- ...
- Выбираем  $k$ -й объект из оставшихся  $n - k + 1$  способом.
- Каждое сочетание получилось  $k!$  раз в различных порядках.
- Поэтому поделим ответ на  $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k$ .

Получаем, что

$$\begin{aligned} C_n^k &= \frac{n \cdot (n - 1) \cdots (n - k + 1)}{1 \cdot 2 \cdots k} \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdots (n - k)}{1 \cdot 2 \cdots (n - k)} \times \frac{(n - k + 1) \cdot (n - k + 2) \cdots n}{1 \cdot 2 \cdots k} \\ &= \frac{n!}{k! \times (n - k)!}. \end{aligned}$$

# Число сочетаний

Вычисление  $C_n^k$  – комбинаторное решение:

- Выбираем первый объект  $n$  способами.
- Выбираем второй объект из оставшихся  $n - 1$  способом.
- ...
- Выбираем  $k$ -й объект из оставшихся  $n - k + 1$  способом.
- Каждое сочетание получилось  $k!$  раз в различных порядках.
- Поэтому поделим ответ на  $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$ .

Итоговая формула:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \times (n - k)!}$$

Пример:  $n = 4$ ,  $k = 2$ . Получаем

$$C_4^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \times 1 \cdot 2} = \frac{24}{4} = 6.$$

# Число сочетаний

Вычисление  $C_n^k$  — сведение к подзадачам:

- Рассмотрим объект с номером  $n$ .
- Если мы выберем его, из  $n - 1$  оставшегося объекта нужно будет выбрать ещё  $k - 1$ .
- Если мы не выберем его, из  $n - 1$  оставшегося объекта нужно будет выбрать ещё  $k$ .

Получаем, что

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k.$$

База:  $C_0^0 = 1$ ,  $C_n^k = 0$  при  $k < 0$  или  $k > n$ .

Пример:  $n = 4$ ,  $k = 2$ . Получаем  $C_4^2 = 6$ .

# Число сочетаний

$n \setminus k$	-1	0	1	2	3	4
0	0	1	0	0	0	0
1	0	?	?	0	0	0
2	0	?	?	?	0	0
3	0	?	?	?	?	0
4	0	?	?	?	?	?

Получаем, что

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k.$$

База:  $C_0^0 = 1$ ,  $C_n^k = 0$  при  $k < 0$  или  $k > n$ .

Пример:  $n = 4$ ,  $k = 2$ . Получаем  $C_4^2 = 6$ .

## Число сочетаний

n \ k	-1	0	1	2	3	4
0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0
2	0	1	2	1	0	0
3	0	1	3	3	1	0
4	0	1	4	6	4	1

Получаем, что

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k.$$

База:  $C_0^0 = 1$ ,  $C_n^k = 0$  при  $k < 0$  или  $k > n$ .

Пример:  $n = 4$ ,  $k = 2$ . Получаем  $C_4^2 = 6$ .

## Число сочетаний

$n \setminus k$	-1	0	1	2	3	4
0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0
2	0	1	2	1	0	0
3	0	1	3	3	1	0
4	0	1	4	6	4	1

Получаем, что

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k.$$

База:  $C_0^0 = 1$ ,  $C_n^k = 0$  при  $k < 0$  или  $k > n$ .

Пример:  $n = 4$ ,  $k = 2$ . Получаем  $C_4^2 = 6$ .

# Число сочетаний

n \ k	-1	0	1	2	3	4
0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0
2	0	1	2	1	0	0
3	0	1	3	3	1	0
4	0	1	4	6	4	1

Псевдокод:

```
for n := 0, ..., maxN:  
  c[n][0] := 1  
  for k := 1, ..., n:  
    c[n][k] := c[n - 1][k - 1] + c[n - 1][k]
```

# Содержание

## 1 Одномерные задачи

- Числа Фибоначчи
- Лестница
- Динамика и индукция
- Анти-лестница
- Кузнечик
- Восстановление ответа

## 2 Двумерные задачи

- Число сочетаний
- **Наибольшая общая подпоследовательность**
- Редакционное расстояние
- Строка и шаблон
- Наибольшая возрастающая подпоследовательность

# Наибольшая общая подпоследовательность

Определения:

- Подпоследовательность последовательности  $p_1, p_2, \dots, p_k$  (будем обозначать как  $p_{1..k}$ ) — это последовательность  $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_r}$  для индексов  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq k$ .
- Общая подпоследовательность  $a_{1..m}$  и  $b_{1..n}$  — это последовательность, являющаяся подпоследовательностью и для  $a$ , и для  $b$ .

Постановка задачи:

- Есть две последовательности  $a_{1..m}$  и  $b_{1..n}$ .
- Требуется найти общую подпоследовательность максимальной длины.

Из чего именно состоят последовательности — не важно.

Мы будем рассматривать последовательности целых чисел.

# Наибольшая общая подпоследовательность

Пример:

- $a = (1, 2, 4, 6, 3), m = 5$
- $b = (5, 1, 4, 2, 6, 3, 2), n = 7$

# Наибольшая общая подпоследовательность

Пример:

- $a = (1, 2, 4, 6, 3), m = 5$
- $b = (5, 1, 4, 2, 6, 3, 2), n = 7$
- Наибольшая общая подпоследовательность:

$p = (1, 2, 6, 3)$ , её длина равна 4.

Как подпоследовательность  $a$ :  $p = (a_1, a_2, a_4, a_5)$ .

Как подпоследовательность  $b$ :  $p = (b_2, b_4, b_5, b_6)$ .

# Наибольшая общая подпоследовательность

Пример:

- $a = (1, 2, 4, 6, 3), m = 5$
- $b = (5, 1, 4, 2, 6, 3, 2), n = 7$
- Наибольшая общая подпоследовательность:  
 $p = (1, 2, 6, 3)$ , её длина равна 4.  
Как подпоследовательность  $a$ :  $p = (a_1, a_2, a_4, a_5)$ .  
Как подпоследовательность  $b$ :  $p = (b_2, b_4, b_5, b_6)$ .
- Другой оптимальный ответ:  
 $q = (1, 4, 6, 3)$ , её длина также равна 4.  
Как подпоследовательность  $a$ :  $q = (a_1, a_3, a_4, a_5)$ .  
Как подпоследовательность  $b$ :  $q = (b_2, b_3, b_5, b_6)$ .

# Наибольшая общая подпоследовательность

Сводим к следующим подзадачам:

- Даны префиксы последовательностей  $a$  и  $b$ :  $a_{1..i}$  и  $b_{1..j}$ .
- Найдём их наибольшую общую подпоследовательность.

Решение подзадачи для  $a_{1..i}$  и  $b_{1..j}$ :

- Пусть оптимальное решение непусто (иначе всё очевидно).
- Рассмотрим последнее число в нём.
- Это число равно какому-то  $a_x$  ( $1 \leq x \leq i$ ).
- Это число также равно какому-то  $b_y$  ( $1 \leq y \leq j$ ).
- Значит, для получения оптимального решения нужно решить подзадачу для префиксов  $a_{1..x-1}$  и  $b_{1..y-1}$  и приписать к полученному решению это число (оно равно  $a_x$  и  $b_y$ ).
- Если пар  $(x, y)$  несколько, ...

# Наибольшая общая подпоследовательность

Сводим к следующим подзадачам:

- Даны префиксы последовательностей  $a$  и  $b$ :  $a_{1..i}$  и  $b_{1..j}$ .
- Найдём их наибольшую общую подпоследовательность.

Решение подзадачи для  $a_{1..i}$  и  $b_{1..j}$ :

- Пусть оптимальное решение непусто (иначе всё очевидно).
- Рассмотрим последнее число в нём.
- Это число равно какому-то  $a_x$  ( $1 \leq x \leq i$ ).
- Это число также равно какому-то  $b_y$  ( $1 \leq y \leq j$ ).
- Значит, для получения оптимального решения нужно решить подзадачу для префиксов  $a_{1..x-1}$  и  $b_{1..y-1}$  и приписать к полученному решению это число (оно равно  $a_x$  и  $b_y$ ).
- Если пар  $(x, y)$  несколько, ...

# Наибольшая общая подпоследовательность

Сводим к следующим подзадачам:

- Даны префиксы последовательностей  $a$  и  $b$ :  $a_{1..i}$  и  $b_{1..j}$ .
- Найдём их наибольшую общую подпоследовательность.

Решение подзадачи для  $a_{1..i}$  и  $b_{1..j}$ :

- Пусть оптимальное решение непусто (иначе всё очевидно).
- Рассмотрим последнее число в нём.
- Это число равно какому-то  $a_x$  ( $1 \leq x \leq i$ ).
- Это число также равно какому-то  $b_y$  ( $1 \leq y \leq j$ ).
- Значит, для получения оптимального решения нужно решить подзадачу для префиксов  $a_{1..x-1}$  и  $b_{1..y-1}$  и приписать к полученному решению это число (оно равно  $a_x$  и  $b_y$ ).
- Если пар  $(x, y)$  несколько, найдём лучшее из решений для всех таких пар.

# Наибольшая общая подпоследовательность

Сводим к следующим подзадачам:

- Даны префиксы последовательностей  $a$  и  $b$ :  $a_{1..i}$  и  $b_{1..j}$ .
- Найдём их наибольшую общую подпоследовательность.

Решение подзадачи для  $a_{1..i}$  и  $b_{1..j}$ :

- Пусть оптимальное решение непусто (иначе всё очевидно).
- Рассмотрим последнее число в нём.
- Это число равно какому-то  $a_x$  ( $1 \leq x \leq i$ ).
- Это число также равно какому-то  $b_y$  ( $1 \leq y \leq j$ ).
- Значит, для получения оптимального решения нужно решить подзадачу для префиксов  $a_{1..x-1}$  и  $b_{1..y-1}$  и приписать к полученному решению это число (оно равно  $a_x$  и  $b_y$ ).
- Если пар  $(x, y)$  несколько, можно рассматривать только максимальные  $x$  и  $y$ .

# Наибольшая общая подпоследовательность

	$b_j$		<b>5</b>	<b>1</b>	<b>4</b>	<b>2</b>	<b>6</b>	<b>3</b>	<b>2</b>
$a_i$	$i \setminus j$	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>1</b>	1	0	0	<b>1</b>	0	0	0	0	0
<b>2</b>	2	0	0	0	0	<b>2</b>	0	0	<b>2</b>
<b>4</b>	3	0	0	0	<b>2</b>	0	0	0	0
<b>6</b>	4	0	0	0	0	0	<b>3</b>	0	0
<b>3</b>	5	0	0	0	0	0	0	<b>4</b>	0

Пример:

- $a = (1, 2, 4, 6, 3), m = 5$
- $b = (5, 1, 4, 2, 6, 3, 2), n = 7$

# Наибольшая общая подпоследовательность

	$b_j$		5	1	4	2	6	3	2
$a_i$	$i \setminus j$	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0	0
2	2	0	0	0	0	2	0	0	2
4	3	0	0	0	2	0	0	0	0
6	4	0	0	0	0	0	3	0	0
3	5	0	0	0	0	0	0	4	0

- $f(i, j)$  — ответ для  $a_{1..i}$  и  $b_{1..j}$  при условии, что  $a_i = b_j$
- База:  $f(i, 0) = f(0, j) = 0$
- Ответ:  $\max_{i=0..m} \max_{j=0..n} f(i, j)$
- Асимптотика:  $O(m^2n^2)$  времени,  $O(mn)$  памяти

# Наибольшая общая подпоследовательность

	$b_j$		5	1	4	2	6	3	2
$a_i$	$i \setminus j$	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0	0
2	2	0	0	0	0	2	0	0	2
4	3	0	0	0	2	0	0	0	0
6	4	0	0	0	0	0	3	0	0
3	5	0	0	0	0	0	0	4	0

```

for i := 1, ..., m:
  for j := 1, ..., n:
    if a[i] = b[j]:
      for u := 0, ..., i - 1:
        for v := 0, ..., j - 1:
          f[i][j] := max (f[i][j], f[u][v] + 1)
  
```

# Наибольшая общая подпоследовательность

	$b_j$		<b>5</b>	<b>1</b>	<b>4</b>	<b>2</b>	<b>6</b>	<b>3</b>	<b>2</b>
$a_i$	$i \setminus j$	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>1</b>	1	0	0	1	1	1	1	1	1
<b>2</b>	2	0	0	1	1	2	2	2	2
<b>4</b>	3	0	0	1	2	2	2	2	2
<b>6</b>	4	0	0	1	2	2	3	3	3
<b>3</b>	5	0	0	1	2	2	3	4	4

Пример:

- $a = (1, 2, 4, 6, 3), m = 5$
- $b = (5, 1, 4, 2, 6, 3, 2), n = 7$

# Наибольшая общая подпоследовательность

	$b_j$		5	1	4	2	6	3	2
$a_i$	$i \setminus j$	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
2	2	0	0	1	1	2	2	2	2
4	3	0	0	1	2	2	2	2	2
6	4	0	0	1	2	2	3	3	3
3	5	0	0	1	2	2	3	4	4

- $g(i, j)$  – лучший из ответов в прямоугольнике  $[0..i] \times [0..j]$
- База:  $g(i, 0) = g(0, j) = 0$
- Ответ:  $g(m, n)$
- Асимптотика:  $O(m^2n^2)$  времени (???),  $O(mn)$  памяти

# Наибольшая общая подпоследовательность

	$b_j$		5	1	4	2	6	3	2
$a_i$	$i \setminus j$	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
2	2	0	0	1	1	2	2	2	2
4	3	0	0	1	2	2	2	2	2
6	4	0	0	1	2	2	3	3	3
3	5	0	0	1	2	2	3	4	4

- $g(i, j)$  – лучший из ответов в прямоугольнике  $[0..i] \times [0..j]$
- Все решения, в которых последнее число не является одновременно  $a_i$  и  $b_j$ , уже учтены либо в прямоугольнике  $[0..i] \times [0..j - 1]$ , либо в прямоугольнике  $[0..i - 1] \times [0..j]$
- Асимптотика:  $O(mn)$  времени,  $O(mn)$  памяти

# Наибольшая общая подпоследовательность

	$b_j$		5	1	4	2	6	3	2
$a_i$	$i \setminus j$	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
2	2	0	0	1	1	2	2	2	2
4	3	0	0	1	2	2	2	2	2
6	4	0	0	1	2	2	3	3	3
3	5	0	0	1	2	2	3	4	4

```

for i := 1, ..., m:
  for j := 1, ..., n:
    g[i][j] := max (g[i][j - 1], g[i - 1][j])
    if a[i] = b[j]:
      g[i][j] := max (g[i][j], g[i - 1][j - 1] + 1)
  
```

# Содержание

## 1 Одномерные задачи

- Числа Фибоначчи
- Лестница
- Динамика и индукция
- Анти-лестница
- Кузнечик
- Восстановление ответа

## 2 Двумерные задачи

- Число сочетаний
- Наибольшая общая подпоследовательность
- Редакционное расстояние
- Строка и шаблон
- Наибольшая возрастающая подпоследовательность

# Редакционное расстояние

Определение:

- Редакционное расстояние (или расстояние Левенштейна)  $d(s, t)$  между двумя строками  $s$  и  $t$  — это минимальное количество добавлений, удалений и замен символов, которые нужно сделать с  $s$ , чтобы получить  $t$ .

Пример:

- $d(\text{gets}, \text{goat}) = 3$ :  $\text{gets} \xrightarrow{-s} \text{get} \xrightarrow{e \rightarrow o} \text{got} \xrightarrow{+a} \text{goat}$ .  
Другой способ:  $\text{gets} \xrightarrow{e \rightarrow o} \text{gots} \xrightarrow{t \rightarrow a} \text{goas} \xrightarrow{s \rightarrow t} \text{goat}$ .

Постановка задачи:

- По двум данным строкам требуется найти редакционное расстояние между ними.

Замечание:

- Строки  $s$  и  $t$  равноправны: к каждому действию есть обратное. Если выполнить обратные действия в обратном порядке, из  $t$  получится  $s$ .

# Редакционное расстояние

Сводим к следующим подзадачам:

- Даны префиксы (начала) строк  $s$  и  $t$ :  $s_{1..i}$  (префикс строки  $s$  длины  $i$ ) и  $t_{1..j}$  (префикс строки  $t$  длины  $j$ ).
- Найдём редакционное расстояние между ними.

Решение подзадачи для  $s_{1..i}$  и  $t_{1..j}$ :

- Если  $s_i = t_j$ , перейдём к решению подзадачи для  $s_{1..i-1}$  и  $t_{1..j-1}$ .
- В противном случае оптимальная последовательность действий непуста, и либо с  $s_i$ , либо с  $t_j$  случилось хотя бы одно действие.
- Рассмотрим какое-нибудь из этих действий.
- Если это удаление, то это удаление символа  $s_i$ . Делаем его и переходим к подзадаче для  $s_{1..i-1}$  и  $t_{1..j}$ .
- Если это добавление, то это добавление символа  $t_j$ . Делаем его и переходим к подзадаче для  $s_{1..i}$  и  $t_{1..j-1}$ .
- Если это замена, то это замена символа  $s_i$  на символ  $t_j$ . Делаем её и переходим к подзадаче для  $s_{1..i-1}$  и  $t_{1..j-1}$ .

# Редакционное расстояние

Сводим к следующим подзадачам:

- Даны префиксы (начала) строк  $s$  и  $t$ :  $s_{1..i}$  (префикс строки  $s$  длины  $i$ ) и  $t_{1..j}$  (префикс строки  $t$  длины  $j$ ).
- Найдём редакционное расстояние между ними.

Решение подзадачи для  $s_{1..i}$  и  $t_{1..j}$ :

- Если  $s_i = t_j$ , перейдём к решению подзадачи для  $s_{1..i-1}$  и  $t_{1..j-1}$ .
- В противном случае оптимальная последовательность действий непуста, и либо с  $s_i$ , либо с  $t_j$  случилось хотя бы одно действие.
- Рассмотрим какое-нибудь из этих действий.
- Если это удаление, то это удаление символа  $s_i$ . Делаем его и переходим к подзадаче для  $s_{1..i-1}$  и  $t_{1..j}$ .
- Если это добавление, то это добавление символа  $t_j$ . Делаем его и переходим к подзадаче для  $s_{1..i}$  и  $t_{1..j-1}$ .
- Если это замена, то это замена символа  $s_i$  на символ  $t_j$ . Делаем её и переходим к подзадаче для  $s_{1..i-1}$  и  $t_{1..j-1}$ .

# Редакционное расстояние

Сводим к следующим подзадачам:

- Даны префиксы (начала) строк  $s$  и  $t$ :  $s_{1..i}$  (префикс строки  $s$  длины  $i$ ) и  $t_{1..j}$  (префикс строки  $t$  длины  $j$ ).
- Найдём редакционное расстояние между ними.

Решение подзадачи для  $s_{1..i}$  и  $t_{1..j}$ :

- Если  $s_i = t_j$ , перейдём к решению подзадачи для  $s_{1..i-1}$  и  $t_{1..j-1}$ .
- В противном случае оптимальная последовательность действий непуста, и либо с  $s_i$ , либо с  $t_j$  случилось хотя бы одно действие.
- Рассмотрим какое-нибудь из этих действий.
- Если это удаление, то это удаление символа  $s_i$ . Делаем его и переходим к подзадаче для  $s_{1..i-1}$  и  $t_{1..j}$ .
- Если это добавление, то это добавление символа  $t_j$ . Делаем его и переходим к подзадаче для  $s_{1..i}$  и  $t_{1..j-1}$ .
- Если это замена, то это замена символа  $s_i$  на символ  $t_j$ . Делаем её и переходим к подзадаче для  $s_{1..i-1}$  и  $t_{1..j-1}$ .

# Редакционное расстояние

Пример:

- $s = \text{gets}$
- $t = \text{goat}$

	$t_j$		g	o	a	t
$s_i$	$i \setminus j$	0	1	2	3	4
	0	0	1	2	3	4
g	1	1	0	1	2	3
e	2	2	1	1	2	3
t	3	3	2	2	2	2
s	4	4	3	3	3	3

- База:  $d(i, 0) = i$ ,  $d(0, j) = j$
- Ответ:  $d(m, n)$ , где  $m$  — длина строки  $s$ , а  $n$  — длина строки  $t$
- Асимптотика:  $O(mn)$  времени,  $O(mn)$  памяти

## Редакционное расстояние

Пример:

- $s = \text{gets}$
- $t = \text{goat}$

	$t_j$		g	o	a	t
$s_i$	$i \setminus j$	0	1	2	3	4
	0	0	1	2	3	4
g	1	1	0	1	2	3
e	2	2	1	1	2	3
t	3	3	2	2	2	2
s	4	4	3	3	3	3

Псевдокод:

```

for i := 1, ..., m:
  for j := 1, ..., n:
    if s[i] = t[j]:
      d[i][j] := d[i - 1][j - 1]
    else:
      d[i][j] := 1 + min (d[i - 1][j      ],
                          d[i - 1][j - 1],
                          d[i      ][j - 1])
  
```

# Содержание

## 1 Одномерные задачи

- Числа Фибоначчи
- Лестница
- Динамика и индукция
- Анти-лестница
- Кузнечик
- Восстановление ответа

## 2 Двумерные задачи

- Число сочетаний
- Наибольшая общая подпоследовательность
- Редакционное расстояние
- Строка и шаблон
- Наибольшая возрастающая подпоследовательность

# Строка и шаблон

## Определения:

- Шаблон — это строка, которая может содержать специальные символы '?' и '\*'.
- Обычному символу шаблона можно поставить в соответствие ровно один такой же символ строки.
- Специальному символу '?' можно поставить в соответствие ровно один любой символ строки.
- Специальному символу '\*' можно поставить в соответствие любую (в том числе и пустую) последовательность любых символов строки.
- Строка  $s$  длины  $m$  соответствует шаблону  $p$  длины  $n$ , если она разбивается на  $n$  частей так, что  $i$ -я часть строки соответствует  $i$ -му символу шаблона.

# Строка и шаблон

Постановка задачи:

- По данным  $s$  и  $p$  нужно определить, соответствует ли строка  $s$  шаблону  $p$ .

Пример:

- $s = \text{button}$ ,  $p = ?u*t*n$

- Соответствие:

```
b u t t o n
? u * t * n
```

- Другой способ:

```
b u      t t o n
? u * t * n
```

# Строка и шаблон

Сводим к следующим подзадачам:

- Даны префиксы (начала) строки  $s$  и шаблона  $t$ :  $s_{1..i}$  (префикс строки  $s$  длины  $i$ ) и  $p_{1..j}$  (префикс шаблона  $p$  длины  $j$ ).
- Выясним, есть ли между ними соответствие.

Решение подзадачи для  $s_{1..i}$  и  $p_{1..j}$ :

- Если  $p_j$  — обычный символ, сравним его с  $s_i$  и в случае равенства перейдём к решению подзадачи для  $s_{1..i-1}$  и  $p_{1..j-1}$ .
- Если  $p_j = ?$ , перейдём к решению подзадачи для  $s_{1..i-1}$  и  $p_{1..j-1}$ .
- Если  $p_j = *$ , соответствие есть тогда и только тогда, когда соответствие есть хотя бы в одной из подзадач для  $s_{1..k}$  и  $p_{1..j-1}$  при  $0 \leq k \leq i$ .

Замечание:

- Чтобы база была простой, допишем к обеим строкам спереди одинаковый специальный символ, например, #.

# Строка и шаблон

Сводим к следующим подзадачам:

- Даны префиксы (начала) строки  $s$  и шаблона  $t$ :  $s_{1..i}$  (префикс строки  $s$  длины  $i$ ) и  $p_{1..j}$  (префикс шаблона  $p$  длины  $j$ ).
- Выясним, есть ли между ними соответствие.

Решение подзадачи для  $s_{1..i}$  и  $p_{1..j}$ :

- Если  $p_j$  — обычный символ, сравним его с  $s_i$  и в случае равенства перейдём к решению подзадачи для  $s_{1..i-1}$  и  $p_{1..j-1}$ .
- Если  $p_j = ?$ , перейдём к решению подзадачи для  $s_{1..i-1}$  и  $p_{1..j-1}$ .
- Если  $p_j = *$ , соответствие есть тогда и только тогда, когда соответствие есть хотя бы в одной из подзадач для  $s_{1..k}$  и  $p_{1..j-1}$  при  $0 \leq k \leq i$ .

Замечание:

- Чтобы база была простой, допишем к обеим строкам спереди одинаковый специальный символ, например, #.

## Строка и шаблон

	$s_i$	#	b	u	t	t	o	n
$p_j$	$j \setminus i$	1	2	3	4	5	6	7
#	1	1	0	0	0	0	0	0
?	2	0	1	0	0	0	0	0
u	3	0	0	1	0	0	0	0
*	4	0	0	1	1	1	1	1
t	5	0	0	0	1	1	0	0
*	6	0	0	0	1	1	1	1
n	7	0	0	0	0	0	0	1

- База:  $f(0,0) = 1$ ,  $f(i,0) = 0$  при  $i > 0$ ,  $f(0,j) = 0$  при  $j > 0$
- Ответ:  $f(m,n)$
- Асимптотика:  $O(m^2n)$  времени (???),  $O(mn)$  памяти

# Строка и шаблон

Псевдокод:

```
for i := 1, ..., m:
  for j := 1, ..., n:
    if p[j] = '*':
      f[i][j] := 0
      for k := 0, ..., i:
        f[i][j] := f[i][j] or f[k][j - 1]
    else if p[j] = '?':
      f[i][j] := f[i - 1][j - 1]
    else:
      f[i][j] := f[i - 1][j - 1] and (s[i] = p[j])
```

- База:  $f(0,0) = 1$ ,  $f(i,0) = 0$  при  $i > 0$ ,  $f(0,j) = 0$  при  $j > 0$
- Ответ:  $f(m,n)$
- Асимптотика:  $O(m^2n)$  времени (???) ,  $O(mn)$  памяти

## Строка и шаблон

	$s_i$	#	b	u	t	t	o	n
$p_j$	$j \setminus i$	1	2	3	4	5	6	7
#	1	1	0	0	0	0	0	0
?	2	0	1	0	0	0	0	0
u	3	0	0	1	0	0	0	0
*	4	0	0	1	1	1	1	1
t	5	0	0	0	1	1	0	0
*	6	0	0	0	1	1	1	1
n	7	0	0	0	0	0	0	1

При  $p_j = *$ :

- $f(i, j) = f(0, j - 1) \vee \dots \vee f(i - 1, j - 1) \vee f(i, j - 1)$
- $f(i - 1, j) = f(0, j - 1) \vee \dots \vee f(i - 1, j - 1)$
- Значит,  $f(i, j) = f(i - 1, j) \vee f(i, j - 1)$

# Строка и шаблон

Псевдокод:

```
for i := 1, ..., m:
  for j := 1, ..., n:
    if p[j] = '*':
      f[i][j] := f[i - 1][j] or f[i][j - 1]
    else if p[j] = '?':
      f[i][j] := f[i - 1][j - 1]
    else:
      f[i][j] := f[i - 1][j - 1] and (s[i] = p[j])
```

- База:  $f(0,0) = 1$ ,  $f(i,0) = 0$  при  $i > 0$ ,  $f(0,j) = 0$  при  $j > 0$
- Ответ:  $f(m,n)$
- Асимптотика:  $O(mn)$  времени,  $O(mn)$  памяти

# Содержание

## 1 Одномерные задачи

- Числа Фибоначчи
- Лестница
- Динамика и индукция
- Анти-лестница
- Кузнечик
- Восстановление ответа

## 2 Двумерные задачи

- Число сочетаний
- Наибольшая общая подпоследовательность
- Редакционное расстояние
- Строка и шаблон
- **Наибольшая возрастающая подпоследовательность**

# Наибольшая возрастающая подпоследовательность

Определения:

- Подпоследовательность последовательности  $a_1, a_2, \dots, a_n$  (будем обозначать как  $a_{1..n}$ ) — это последовательность  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$  для индексов  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ .
- Подпоследовательность длины  $k$ , для которой выполнено  $a_{i_1} < a_{i_2} < \dots < a_{i_k}$ , называется возрастающей.

Постановка задачи:

- Есть последовательность  $a_{1..n}$ .
- Требуется найти её возрастающую подпоследовательность максимальной длины.

Из чего именно состоит последовательность — не важно.

Мы будем рассматривать последовательность целых чисел.

# Наибольшая возрастающая подпоследовательность

Пример:

- $a = (3, 6, 1, 9, 7, 2, 4, 8, 5), n = 9.$

## Наибольшая возрастающая подпоследовательность

Пример:

- $a = (3, 6, 1, 9, 7, 2, 4, 8, 5)$ ,  $n = 9$ .
- Наибольшая возрастающая подпоследовательность:  
 $p = (1, 2, 4, 5)$ , её длина равна 4.

## Наибольшая возрастающая подпоследовательность

Пример:

- $a = (3, 6, 1, 9, 7, 2, 4, 8, 5)$ ,  $n = 9$ .
- Наибольшая возрастающая подпоследовательность:  
 $p = (1, 2, 4, 5)$ , её длина равна 4.
- Другой оптимальный ответ:  
 $q = (3, 6, 7, 8)$ , её длина также равна 4.

## Наибольшая возрастающая подпоследовательность

Пример:

- $a = (3, 6, 1, 9, 7, 2, 4, 8, 5)$ ,  $n = 9$ .
- Наибольшая возрастающая подпоследовательность:  
 $p = (1, 2, 4, 5)$ , её длина равна 4.
- Другой оптимальный ответ:  
 $q = (3, 6, 7, 8)$ , её длина также равна 4.
- Ещё один оптимальный ответ:  
 $r = (1, 2, 4, 8)$ , её длина также равна 4.

## Наибольшая возрастающая подпоследовательность

Подзадачи:

- Будем решать задачу на префиксах последовательности.
- Выпишем **все** возрастающие подпоследовательности:

# Наибольшая возрастающая подпоследовательность

Подзадачи:

- Будем решать задачу на префиксах последовательности.
- Выпишем **все** возрастающие подпоследовательности:
- $a = (3), n = 1: 3$ .

## Наибольшая возрастающая подпоследовательность

Подзадачи:

- Будем решать задачу на префиксах последовательности.
- Выпишем **все** возрастающие подпоследовательности:
- $a = (3)$ ,  $n = 1$ : 3.
- $a = (3, 6)$ ,  $n = 2$ : 3, 6; 36.

## Наибольшая возрастающая подпоследовательность

Подзадачи:

- Будем решать задачу на префиксах последовательности.
- Выпишем **все** возрастающие подпоследовательности:
- $a = (3)$ ,  $n = 1$ : 3.
- $a = (3, 6)$ ,  $n = 2$ : 3, 6; 36.
- $a = (3, 6, 1)$ ,  $n = 3$ : 1, 3, 6; 36.

# Наибольшая возрастающая подпоследовательность

Подзадачи:

- Будем решать задачу на префиксах последовательности.
- Выпишем **все** возрастающие подпоследовательности:
- $a = (3)$ ,  $n = 1$ : 3.
- $a = (3, 6)$ ,  $n = 2$ : 3, 6; 36.
- $a = (3, 6, 1)$ ,  $n = 3$ : 1, 3, 6; 36.
- $a = (3, 6, 1, 9)$ ,  $n = 4$ : 1, 3, 6, 9; 36, 19, 39, 69; 369.

# Наибольшая возрастающая подпоследовательность

Подзадачи:

- Будем решать задачу на префиксах последовательности.
- Выпишем **все** возрастающие подпоследовательности:
- $a = (3)$ ,  $n = 1$ : 3.
- $a = (3, 6)$ ,  $n = 2$ : 3, 6; 36.
- $a = (3, 6, 1)$ ,  $n = 3$ : 1, 3, 6; 36.
- $a = (3, 6, 1, 9)$ ,  $n = 4$ : 1, 3, 6, 9; 36, 19, 39, 69; 369.
- $a = (3, 6, 1, 9, 7)$ ,  $n = 5$ : 1, 3, 6, 7, 9; 36, 17, 37, 67, 19, 39, 69; 367, 369.

# Наибольшая возрастающая подпоследовательность

Подзадачи:

- Будем решать задачу на префиксах последовательности.
- Выпишем **все** возрастающие подпоследовательности:
- $a = (3)$ ,  $n = 1$ : 3.
- $a = (3, 6)$ ,  $n = 2$ : 3, 6; 36.
- $a = (3, 6, 1)$ ,  $n = 3$ : 1, 3, 6; 36.
- $a = (3, 6, 1, 9)$ ,  $n = 4$ : 1, 3, 6, 9; 36, 19, 39, 69; 369.
- $a = (3, 6, 1, 9, 7)$ ,  $n = 5$ : 1, 3, 6, 7, 9; 36, 17, 37, 67, 19, 39, 69; 367, 369.
- $a = (3, 6, 1, 9, 7, 2)$ ,  $n = 6$ : 1, 2, 3, 6, 7, 9; 12, 36, 17, 37, 67, 19, 39, 69; 367, 369.

# Наибольшая возрастающая подпоследовательность

Подзадачи:

- Будем решать задачу на префиксах последовательности.
- Выпишем **все** возрастающие подпоследовательности:
- $a = (3)$ ,  $n = 1$ : 3.
- $a = (3, 6)$ ,  $n = 2$ : 3, 6; 36.
- $a = (3, 6, 1)$ ,  $n = 3$ : 1, 3, 6; 36.
- $a = (3, 6, 1, 9)$ ,  $n = 4$ : 1, 3, 6, 9; 36, 19, 39, 69; 369.
- $a = (3, 6, 1, 9, 7)$ ,  $n = 5$ : 1, 3, 6, 7, 9; 36, 17, 37, 67, 19, 39, 69; 367, 369.
- $a = (3, 6, 1, 9, 7, 2)$ ,  $n = 6$ : 1, 2, 3, 6, 7, 9; 12, 36, 17, 37, 67, 19, 39, 69; 367, 369.
- $a = (3, 6, 1, 9, 7, 2, 4)$ ,  $n = 7$ : 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9; 12, 14, 24, 34, 36, 17, 37, 67, 19, 39, 69; 124, 367, 369.

# Наибольшая возрастающая подпоследовательность

Подзадачи:

- Будем решать задачу на префиксах последовательности.
- Выпишем **все** возрастающие подпоследовательности:
- $a = (3, 6, 1, 9, 7, 2, 4, 8)$ ,  $n = 8$ :  
1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9;  
12, 14, 24, 34, 36, 17, 37, 67, 18, 28, 38, 48, 68, 78, 19, 39, 69;  
124, 367, 128, 148, 248, 348, 368, 178, 378, 678, 369;  
1248, 3678.

# Наибольшая возрастающая подпоследовательность

Подзадачи:

- Будем решать задачу на префиксах последовательности.
- Выпишем **все** возрастающие подпоследовательности:
- $a = (3, 6, 1, 9, 7, 2, 4, 8)$ ,  $n = 8$ :  
1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9;  
12, 14, 24, 34, 36, 17, 37, 67, 18, 28, 38, 48, 68, 78, 19, 39, 69;  
124, 367, 128, 148, 248, 348, 368, 178, 378, 678, 369;  
1248, 3678.
- $a = (3, 6, 1, 9, 7, 2, 4, 8, 5)$ ,  $n = 9$ :  
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;  
12, 14, 24, 34, 15, 25, 35, 45, 36, 17, 37, 67, 18, 28, 38, 48, 68,  
78, 19, 39, 69;  
124, 125, 145, 245, 345, 367, 128, 148, 248, 348, 368, 178, 378,  
678, 369;  
1245, 1248, 3678.

## Наибольшая возрастающая подпоследовательность

### Наблюдение 1:

- Что нужно помнить про возрастающую подпоследовательность, чтобы достраивать её справа? Только последний элемент.

## Наибольшая возрастающая подпоследовательность

### Наблюдение 1:

- Что нужно помнить про возрастающую подпоследовательность, чтобы достраивать её справа? Только последний элемент.
- $a = (3), n = 1: 3$ .

# Наибольшая возрастающая подпоследовательность

## Наблюдение 1:

- Что нужно помнить про возрастающую подпоследовательность, чтобы достраивать её справа? Только последний элемент.
- $a = (3), n = 1: 3.$
- $a = (3, 6), n = 2: 3, 6; ?6.$

# Наибольшая возрастающая подпоследовательность

## Наблюдение 1:

- Что нужно помнить про возрастающую подпоследовательность, чтобы достраивать её справа? Только последний элемент.
- $a = (3), n = 1$ : 3.
- $a = (3, 6), n = 2$ : 3, 6; ?6.
- $a = (3, 6, 1), n = 3$ : 1, 3, 6; ?6.

# Наибольшая возрастающая подпоследовательность

## Наблюдение 1:

- Что нужно помнить про возрастающую подпоследовательность, чтобы достраивать её справа? Только последний элемент.
- $a = (3), n = 1$ : 3.
- $a = (3, 6), n = 2$ : 3, 6; ?6.
- $a = (3, 6, 1), n = 3$ : 1, 3, 6; ?6.
- $a = (3, 6, 1, 9), n = 4$ : 1, 3, 6, 9; ?6, ?9; ??9.

# Наибольшая возрастающая подпоследовательность

## Наблюдение 1:

- Что нужно помнить про возрастающую подпоследовательность, чтобы достраивать её справа? Только последний элемент.
- $a = (3), n = 1$ : 3.
- $a = (3, 6), n = 2$ : 3, 6; ?6.
- $a = (3, 6, 1), n = 3$ : 1, 3, 6; ?6.
- $a = (3, 6, 1, 9), n = 4$ : 1, 3, 6, 9; ?6, ?9; ??9.
- $a = (3, 6, 1, 9, 7), n = 5$ : 1, 3, 6, 7, 9; ?6, ??, ?9; ???, ??9.

# Наибольшая возрастающая подпоследовательность

## Наблюдение 1:

- Что нужно помнить про возрастающую подпоследовательность, чтобы достраивать её справа? Только последний элемент.
- $a = (3), n = 1$ : 3.
- $a = (3, 6), n = 2$ : 3, 6; ?6.
- $a = (3, 6, 1), n = 3$ : 1, 3, 6; ?6.
- $a = (3, 6, 1, 9), n = 4$ : 1, 3, 6, 9; ?6, ?9; ??9.
- $a = (3, 6, 1, 9, 7), n = 5$ : 1, 3, 6, 7, 9; ?6, ?7, ?9; ???, ??9.
- $a = (3, 6, 1, 9, 7, 2), n = 6$ : 1, 2, 3, 6, 7, 9; ?2, ?6, ?7, ?9; ???, ??9.

# Наибольшая возрастающая подпоследовательность

## Наблюдение 1:

- Что нужно помнить про возрастающую подпоследовательность, чтобы достраивать её справа? Только последний элемент.
- $a = (3), n = 1$ : 3.
- $a = (3, 6), n = 2$ : 3, 6; ?6.
- $a = (3, 6, 1), n = 3$ : 1, 3, 6; ?6.
- $a = (3, 6, 1, 9), n = 4$ : 1, 3, 6, 9; ?6, ?9; ???9.
- $a = (3, 6, 1, 9, 7), n = 5$ : 1, 3, 6, 7, 9; ?6, ?7, ?9; ???7, ???9.
- $a = (3, 6, 1, 9, 7, 2), n = 6$ : 1, 2, 3, 6, 7, 9; ?2, ?6, ?7, ?9; ???7, ???9.
- $a = (3, 6, 1, 9, 7, 2, 4), n = 7$ : 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9; ?2, ?4, ?6, ?7, ?9; ???4, ???7, ???9.

# Наибольшая возрастающая подпоследовательность

## Наблюдение 1:

- Что нужно помнить про возрастающую подпоследовательность, чтобы достраивать её справа? Только последний элемент.
- $a = (3, 6, 1, 9, 7, 2, 4, 8)$ ,  $n = 8$ :  
1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9;  
?2, ?4, ?6, ?7, ?8, ?9;  
??4, ???7, ???8, ???9;  
????8.

# Наибольшая возрастающая подпоследовательность

## Наблюдение 1:

- Что нужно помнить про возрастающую подпоследовательность, чтобы достраивать её справа? Только последний элемент.
- $a = (3, 6, 1, 9, 7, 2, 4, 8)$ ,  $n = 8$ :  
1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9;  
?2, ?4, ?6, ?7, ?8, ?9;  
??4, ???7, ???8, ???9;  
????8.
- $a = (3, 6, 1, 9, 7, 2, 4, 8, 5)$ ,  $n = 9$ :  
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;  
?2, ?4, ?5, ?6, ?7, ?8, ?9;  
??4, ???5, ???7, ???8, ???9;  
????5, ?????8.

## Наибольшая возрастающая подпоследовательность

### Наблюдение 2:

- Чем меньше последнее число, тем больше возможностей достроить подпоследовательность справа.  
Значит, достаточно помнить минимальное такое число.

## Наибольшая возрастающая подпоследовательность

### Наблюдение 2:

- Чем меньше последнее число, тем больше возможностей достроить подпоследовательность справа.  
Значит, достаточно помнить минимальное такое число.
- $a = (3), n = 1: 3$ .

## Наибольшая возрастающая подпоследовательность

### Наблюдение 2:

- Чем меньше последнее число, тем больше возможностей достроить подпоследовательность справа.  
Значит, достаточно помнить минимальное такое число.
- $a = (3), n = 1: 3.$
- $a = (3, 6), n = 2: 3, ?6.$

## Наибольшая возрастающая подпоследовательность

### Наблюдение 2:

- Чем меньше последнее число, тем больше возможностей достроить подпоследовательность справа.  
Значит, достаточно помнить минимальное такое число.
- $a = (3), n = 1: 3.$
- $a = (3, 6), n = 2: 3, ?6.$
- $a = (3, 6, 1), n = 3: 1, ?6.$

## Наибольшая возрастающая подпоследовательность

### Наблюдение 2:

- Чем меньше последнее число, тем больше возможностей достроить подпоследовательность справа.  
Значит, достаточно помнить минимальное такое число.
- $a = (3), n = 1: 3$ .
- $a = (3, 6), n = 2: 3, ?6$ .
- $a = (3, 6, 1), n = 3: 1, ?6$ .
- $a = (3, 6, 1, 9), n = 4: 1, ?6, ??9$ .

# Наибольшая возрастающая подпоследовательность

## Наблюдение 2:

- Чем меньше последнее число, тем больше возможностей достроить подпоследовательность справа.  
Значит, достаточно помнить минимальное такое число.
- $a = (3), n = 1: 3.$
- $a = (3, 6), n = 2: 3, ?6.$
- $a = (3, 6, 1), n = 3: 1, ?6.$
- $a = (3, 6, 1, 9), n = 4: 1, ?6, ??9.$
- $a = (3, 6, 1, 9, 7), n = 5: 1, ?6, ???7.$

## Наибольшая возрастающая подпоследовательность

### Наблюдение 2:

- Чем меньше последнее число, тем больше возможностей достроить подпоследовательность справа.  
Значит, достаточно помнить минимальное такое число.
- $a = (3), n = 1: 3$ .
- $a = (3, 6), n = 2: 3, ?6$ .
- $a = (3, 6, 1), n = 3: 1, ?6$ .
- $a = (3, 6, 1, 9), n = 4: 1, ?6, ??9$ .
- $a = (3, 6, 1, 9, 7), n = 5: 1, ?6, ???$ .
- $a = (3, 6, 1, 9, 7, 2), n = 6: 1, ?2, ???$ .

# Наибольшая возрастающая подпоследовательность

## Наблюдение 2:

- Чем меньше последнее число, тем больше возможностей достроить подпоследовательность справа.  
Значит, достаточно помнить минимальное такое число.
- $a = (3), n = 1: 3.$
- $a = (3, 6), n = 2: 3, ?6.$
- $a = (3, 6, 1), n = 3: 1, ?6.$
- $a = (3, 6, 1, 9), n = 4: 1, ?6, ??9.$
- $a = (3, 6, 1, 9, 7), n = 5: 1, ?6, ???.$
- $a = (3, 6, 1, 9, 7, 2), n = 6: 1, ?2, ???.$
- $a = (3, 6, 1, 9, 7, 2, 4), n = 7: 1, ?2, ??4.$

# Наибольшая возрастающая подпоследовательность

## Наблюдение 2:

- Чем меньше последнее число, тем больше возможностей достроить подпоследовательность справа.  
Значит, достаточно помнить минимальное такое число.
- $a = (3), n = 1: 3.$
- $a = (3, 6), n = 2: 3, ?6.$
- $a = (3, 6, 1), n = 3: 1, ?6.$
- $a = (3, 6, 1, 9), n = 4: 1, ?6, ??9.$
- $a = (3, 6, 1, 9, 7), n = 5: 1, ?6, ???.$
- $a = (3, 6, 1, 9, 7, 2), n = 6: 1, ?2, ???.$
- $a = (3, 6, 1, 9, 7, 2, 4), n = 7: 1, ?2, ??4.$
- $a = (3, 6, 1, 9, 7, 2, 4, 8), n = 8: 1, ?2, ??4, ???8.$

# Наибольшая возрастающая подпоследовательность

## Наблюдение 2:

- Чем меньше последнее число, тем больше возможностей достроить подпоследовательность справа.  
Значит, достаточно помнить минимальное такое число.
- $a = (3), n = 1: 3.$
- $a = (3, 6), n = 2: 3, ?6.$
- $a = (3, 6, 1), n = 3: 1, ?6.$
- $a = (3, 6, 1, 9), n = 4: 1, ?6, ??9.$
- $a = (3, 6, 1, 9, 7), n = 5: 1, ?6, ???.$
- $a = (3, 6, 1, 9, 7, 2), n = 6: 1, ?2, ???.$
- $a = (3, 6, 1, 9, 7, 2, 4), n = 7: 1, ?2, ??4.$
- $a = (3, 6, 1, 9, 7, 2, 4, 8), n = 8: 1, ?2, ??4, ???8.$
- $a = (3, 6, 1, 9, 7, 2, 4, 8, 5), n = 9: 1, ?2, ??4, ???5.$

## Наибольшая возрастающая подпоследовательность

Итак, для каждого префикса и для каждой длины будем помнить минимальное число, на которое может заканчиваться возрастающая подпоследовательность такой длины.

- $a = (3, 6, 1, 9, 7, 2, 4, 8, 5)$ ,  $n = 9$ .

$n = 0$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\dots$
$n = 1$	3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\dots$
$n = 2$	3	6	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\dots$
$n = 3$	1	6	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\dots$
$n = 4$	1	6	9	$\infty$	$\infty$	$\dots$
$n = 5$	1	6	7	$\infty$	$\infty$	$\dots$
$n = 6$	1	2	7	$\infty$	$\infty$	$\dots$
$n = 7$	1	2	4	$\infty$	$\infty$	$\dots$
$n = 8$	1	2	4	8	$\infty$	$\dots$
$n = 9$	1	2	4	5	$\infty$	$\dots$

# Наибольшая возрастающая подпоследовательность

- $a = (3, 6, 1, 9, 7, 2, 4, 8, 5)$ ,  $n = 9$ .

$n = 0$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\dots$
$n = 1$	3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\dots$
$n = 2$	3	6	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\dots$
$n = 3$	1	6	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\dots$
$n = 4$	1	6	9	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\dots$
$n = 5$	1	6	7	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\dots$
$n = 6$	1	2	7	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\dots$
$n = 7$	1	2	4	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\dots$
$n = 8$	1	2	4	8	$\infty$	$\infty$	$\dots$
$n = 9$	1	2	4	5	$\infty$	$\infty$	$\dots$

Мы видим, что:

- Для каждого  $n$  последовательность неубывающая.
- При переходе  $n \rightarrow n + 1$  меняется ровно один элемент.
- Его позицию можно найти двоичным поиском.

## Наибольшая возрастающая подпоследовательность

Код для поиска длины:

```
vector <int> d(n, oo);  
for (auto x : a)  
    *lower_bound(begin(d), end(d), x) = x;  
r = lower_bound(begin(d), end(d), oo) - begin(d);
```

## Наибольшая возрастающая подпоследовательность

Код для поиска длины:

```
vector <int> d(n, oo);  
for (auto x : a)  
    *lower_bound(begin(d), end(d), x) = x;  
r = lower_bound(begin(d), end(d), oo) - begin(d);
```

Как найти саму подпоследовательность?

## Наибольшая возрастающая подпоследовательность

Код для поиска длины:

```
vector <int> d(n, oo);  
for (auto x : a)  
    *lower_bound(begin(d), end(d), x) = x;  
r = lower_bound(begin(d), end(d), oo) - begin(d);
```

Как найти самую подпоследовательность?

- Она нигде явно не записана.
- Можно для каждого числа, попавшего в  $d$ , хранить его позицию в  $a$ , а не само число.
- Когда  $d$  меняется, запишем в массив предков  $p$  позицию предыдущего элемента в  $d$ .
- По массиву предков можно восстановить путь как обычно.

# Вопросы?

# Вопросы?