

# Вычислительная геометрия

Борис Золотов (Б06)

Иван Казменко (Б01, Б05)

Владислав Макаров (Б02, Б03)

Вячеслав Соколов (Б09)

Арина Филимонова (Б10)

Санкт-Петербургский Государственный Университет

Вторник, 24 октября 2023 года

# Содержание

- 1 Точки и прямые на плоскости
  - Точки
  - Прямые
  - Прямая и точка
  - Прямая по двум точкам
  - Точка по двум прямым
  - Запись через определители
- 2 Векторы на плоскости
  - Векторы
  - Скалярное произведение
  - Косое произведение
  - Произведения и их знаки
- 3 Задачи
  - Точка и отрезок
  - Точка и луч
  - Порядок вершин треугольника
  - Выпуклость
  - Два отрезка
  - Внутренность
  - Площадь
- 4 Выпуклая оболочка
  - Задача
  - Подготовка
  - Алгоритм Джарвиса
  - Алгоритм Грэхема

# Содержание

- 1 Точки и прямые на плоскости
  - Точки
  - Прямые
  - Прямая и точка
  - Прямая по двум точкам
  - Точка по двум прямым
  - Запись через определители
- 2 Векторы на плоскости
  - Векторы
  - Скалярное произведение
  - Косое произведение
  - Произведения и их знаки
- 3 Задачи
  - Точка и отрезок
  - Точка и луч
  - Порядок вершин треугольника
  - Выпуклость
  - Два отрезка
  - Внутренность
  - Площадь
- 4 Выпуклая оболочка
  - Задача
  - Подготовка
  - Алгоритм Джарвиса
  - Алгоритм Грэхема

# Точки

Как задать точку на плоскости?

# Точки

Как задать точку на плоскости?  
Две координаты:  $(x, y)$ .

# Точки

Как задать точку на плоскости?

Две координаты:  $(x, y)$ .

Можно хранить отдельно две переменные  $x$  и  $y$ .

# Точки

Как задать точку на плоскости?

Две координаты:  $(x, y)$ .

Можно хранить в `pair <double, double>`.

# Точки

Как задать точку на плоскости?  
Две координаты:  $(x, y)$ .

```
1  #include <iostream>
2  #include <vector>
3  using namespace std;
4
5  struct Point {
6      double x, y;
7  };
8
9  int main () {
10     int n;
11     cin >> n;
12     vector <Point> p (n);
13     for (int i = 0; i < n; i++) {
14         cin >> p[i].x >> p[i].y;
15     }
16     return 0;
17 }
```

# Точки: центр масс

```
1  #include <iostream>
2  #include <vector>
3  using namespace std;
4  struct Point {
5      double x, y;
6      Point () {x = y = 0;}
7      Point (double x_, double y_) : x (x_), y (y_) {}
8      Point operator + (Point const & other) const
9      {return Point (x + other.x, y + other.y);}
10     Point operator * (double c) const
11     {return Point (x * c, y * c);}
12 };
13 int main () {
14     int n;
15     cin >> n;
16     vector <Point> p (n); auto center = Point (0, 0);
17     for (int i = 0; i < n; i++) {
18         cin >> p[i].x >> p[i].y; center = center + p[i];
19     }
20     center = center * (1.0 / n);
21     cout << center.x << " " << center.y << endl;
22     return 0;
23 }
```

# Точки: центр масс

```
1  #include <complex>
2  #include <iostream>
3  #include <vector>
4  using namespace std;
5  using Point = complex <double>;
6  int main () {
7      int n;
8      cin >> n;
9      vector <Point> p (n);
10     auto center = Point (0, 0);
11     for (int i = 0; i < n; i++) {
12         double x, y;
13         cin >> x >> y;
14         p[i].real (x);
15         p[i].imag (y);
16         center += p[i];
17     }
18     center /= n;
19     cout << center.real () << " " << center.imag () << endl;
20     return 0;
21 }
```

# Прямые

Как задать прямую на плоскости?

# Прямые

Как задать прямую на плоскости?

- Уравнение с угловым коэффициентом:
- $y = kx + b$
- $k = 0$  – горизонтальная прямая
- Отдельный случай: вертикальная прямая
- Если в задаче 4 прямые – то получится 16 случаев...
- Больше случаев – больше багов

# Прямые

Как задать прямую на плоскости?

- Параметрическая система уравнений:

- $$\begin{cases} x = x_0 + a \cdot t \\ y = y_0 + b \cdot t \end{cases}$$

- $(a, b) \neq (0, 0)$

- $a = 0$  – вертикальная прямая

- $b = 0$  – горизонтальная прямая

- От домножения  $a$  и  $b$  на любое  $k \neq 0$  прямая не меняется

- Удобно, когда прямая задана двумя точками

# Прямые

Как задать прямую на плоскости?

- Однородное уравнение прямой:
- $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$
- $(a, b) \neq (0, 0)$
- $a = 0$  – горизонтальная прямая
- $b = 0$  – вертикальная прямая
- $c = 0$  – прямая проходит через начало координат
- От домножения  $a$ ,  $b$  и  $c$  на любое  $k \neq 0$  прямая не меняется
- Будем работать с такими уравнениями

# Прямая и точка

Лежит ли заданная точка на заданной прямой?

# Прямая и точка

Лежит ли заданная точка на заданной прямой?

- Точка:  $(x_0, y_0)$
- Прямая:  $ax + by + c = 0$
- Критерий:  $ax_0 + by_0 + c = 0$

# Прямая по двум точкам

Какая прямая проходит через две заданные точки?

# Прямая по двум точкам

Какая прямая проходит через две заданные точки?

- Точки:  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$
- Прямая:  $ax + by + c = 0$
- Критерий: 
$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \end{cases}$$
- Вычтем:  $a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$
- Подберём множители: 
$$\begin{cases} a = y_2 - y_1 \\ b = x_1 - x_2 \end{cases}$$
- Теперь, чтобы вычислить  $c$ , подставим любую из двух точек:  $c = -(ax_1 + by_1)$

# Точка по двум прямым

В какой точке пересекаются две заданные прямые?

# Точка по двум прямым

В какой точке пересекаются две заданные прямые?

- Прямые: 
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$
- Домножим, чтобы сделать одно из слагаемых одинаковым

# Точка по двум прямым

В какой точке пересекаются две заданные прямые?

- Прямые: 
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$
- Домножим первую строку на  $a_2$ , а вторую на  $a_1$ :
- $$\begin{cases} a_2a_1x + a_2b_1y + a_2c_1 = 0 \\ a_1a_2x + a_1b_2y + a_1c_2 = 0 \end{cases}$$
- Вычтем:  $(a_2b_1 - a_1b_2)y + (a_2c_1 - a_1c_2) = 0$
- Преобразуем:  $(a_2b_1 - a_1b_2)y = -(a_2c_1 - a_1c_2)$
- Получим:  $y = -\frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2}$

# Точка по двум прямым

В какой точке пересекаются две заданные прямые?

- Прямые: 
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$
- Домножим первую строку на  $b_2$ , а вторую на  $b_1$ :
- $$\begin{cases} b_2a_1x + b_2b_1y + b_2c_1 = 0 \\ b_1a_2x + b_1b_2y + b_1c_2 = 0 \end{cases}$$
- Вычтем:  $(b_2a_1 - b_1a_2)x + (b_2c_1 - b_1c_2) = 0$
- Преобразуем:  $(b_2a_1 - b_1a_2)x = -(b_2c_1 - b_1c_2)$
- Получим:  $x = -\frac{b_2c_1 - b_1c_2}{b_2a_1 - b_1a_2}$

# Точка по двум прямым

В какой точке пересекаются две заданные прямые?

- Прямые: 
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$
- Ответ:  $x = -\frac{b_2c_1 - b_1c_2}{b_2a_1 - b_1a_2}, y = -\frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2}$

# Точка по двум прямым

В какой точке пересекаются две заданные прямые?

- Прямые: 
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$
- Ответ:  $x = +\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, y = -\frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$
- Особые случаи:
- Оба числителя и знаменатель равны нулю:  
прямые совпадают
- Иначе, если знаменатель равен нулю:  
прямые параллельны

# Запись через определители

В какой точке пересекаются две заданные прямые?

- Прямые: 
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$
- Через определители матриц  $2 \times 2$ :
- $$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$
- $$X = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, Y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, Z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$
- $$x = +\frac{X}{Z}, y = -\frac{Y}{Z}$$

# Запись через определители

В какой точке пересекаются две заданные прямые?

- Прямые: 
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

- Через определитель матрицы  $3 \times 3$ :

$$\begin{vmatrix} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} = r(vz - wy) - s(uz - wx) + t(uy - vx)$$

- $$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (b_1c_2 - b_2c_1)\vec{i} - (a_1c_2 - a_2c_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

- $X, Y, Z$  — это коэффициенты при  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

- $x = +\frac{X}{Z}, y = -\frac{Y}{Z}$

# Содержание

- 1 Точки и прямые на плоскости
  - Точки
  - Прямые
  - Прямая и точка
  - Прямая по двум точкам
  - Точка по двум прямым
  - Запись через определители
- 2 Векторы на плоскости
  - Векторы
  - Скалярное произведение
  - Косое произведение
  - Произведения и их знаки
- 3 Задачи
  - Точка и отрезок
  - Точка и луч
  - Порядок вершин треугольника
  - Выпуклость
  - Два отрезка
  - Внутренность
  - Площадь
- 4 Выпуклая оболочка
  - Задача
  - Подготовка
  - Алгоритм Джарвиса
  - Алгоритм Грэхема

# Векторы

Как задать вектор на плоскости?

# Векторы

Как задать вектор на плоскости?

Две координаты:  $(x, y)$ . Так же, как точку.

# Скалярное произведение

Отложим из одной точки векторы  $\vec{u} = (x_u, y_u)$  и  $\vec{v} = (x_v, y_v)$ .

Что можно про них узнать?

Скалярное произведение:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v$ .

# Скалярное произведение

Отложим из одной точки векторы  $\vec{u} = (x_u, y_u)$  и  $\vec{v} = (x_v, y_v)$ .

Что можно про них узнать?

Скалярное произведение:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v$ .

- Если векторы сонаправлены,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$
- Если векторы ортогональны,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- Если векторы единичной длины,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos \alpha$
- Здесь  $\alpha$  — угол между  $\vec{u}$  и  $\vec{v}$

# Косое произведение

Отложим из одной точки векторы  $\vec{u} = (x_u, y_u)$  и  $\vec{v} = (x_v, y_v)$ .

Что можно про них узнать?

Косое произведение:  $\vec{u} \wedge \vec{v} = x_u y_v - y_u x_v$ .

Другие названия: псевдоскалярное, «векторное» (формально нет).

Через определитель:  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$ .

# Косое произведение

Отложим из одной точки векторы  $\vec{u} = (x_u, y_u)$  и  $\vec{v} = (x_v, y_v)$ .

Что можно про них узнать?

Косое произведение:  $\vec{u} \wedge \vec{v} = x_u y_v - y_u x_v$ .

Другие названия: псевдоскалярное, «векторное» (формально нет).

Через определитель:  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$ .

- Если векторы параллельны,  $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$
- Если векторы ортогональны,  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \pm |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$
- Если векторы единичной длины,  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \sin \alpha$
- Здесь  $\alpha$  — угол от  $\vec{u}$  до  $\vec{v}$  против часовой стрелки
- $\vec{u} \wedge \vec{v}$  — ориентированная площадь параллелограмма на этих векторах

# Произведения и их знаки

Отложим из одной точки векторы  $\vec{u} = (x_u, y_u)$  и  $\vec{v} = (x_v, y_v)$ .

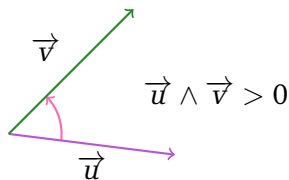
Что можно про них узнать?

Скалярное произведение:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v$ .

Косое произведение:  $\vec{u} \wedge \vec{v} = x_u y_v - y_u x_v$ .

В общем случае:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \alpha$
- Здесь  $\alpha$  — угол от  $\vec{u}$  до  $\vec{v}$  против часовой стрелки



# Произведения и их знаки

Отложим из одной точки векторы  $\vec{u} = (x_u, y_u)$  и  $\vec{v} = (x_v, y_v)$ .

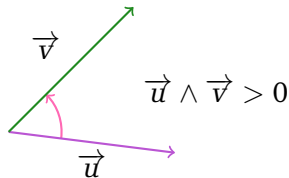
Что можно про них узнать?

Скалярное произведение:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v$ .

Косое произведение:  $\vec{u} \wedge \vec{v} = x_u y_v - y_u x_v$ .

В общем случае:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \alpha$
- Здесь  $\alpha$  — угол от  $\vec{u}$  до  $\vec{v}$  против часовой стрелки



По углу:

$$0 \leq \alpha \leq \pi/2: \quad \vec{u} \cdot \vec{v} \geq 0, \quad \vec{u} \wedge \vec{v} \geq 0$$

$$\pi/2 \leq \alpha \leq \pi: \quad \vec{u} \cdot \vec{v} \leq 0, \quad \vec{u} \wedge \vec{v} \geq 0$$

$$\pi \leq \alpha \leq 3\pi/2: \quad \vec{u} \cdot \vec{v} \leq 0, \quad \vec{u} \wedge \vec{v} \leq 0$$

$$3\pi/2 \leq \alpha \leq 2\pi: \quad \vec{u} \cdot \vec{v} \geq 0, \quad \vec{u} \wedge \vec{v} \leq 0$$

# Произведения и их знаки

Отложим из одной точки векторы  $\vec{u} = (x_u, y_u)$  и  $\vec{v} = (x_v, y_v)$ .

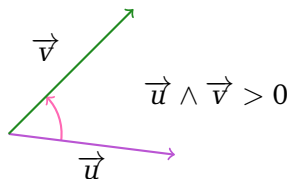
Что можно про них узнать?

Скалярное произведение:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v$ .

Косое произведение:  $\vec{u} \wedge \vec{v} = x_u y_v - y_u x_v$ .

В общем случае:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \alpha$
- Здесь  $\alpha$  — угол от  $\vec{u}$  до  $\vec{v}$  против часовой стрелки



По углу:

$\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$  — значит, угол между векторами острый

$\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$  — значит, угол между векторами тупой

$\vec{u} \wedge \vec{v} > 0$  — значит,  $(\vec{u}, \vec{v})$  — правая пара

$\vec{u} \wedge \vec{v} < 0$  — значит,  $(\vec{u}, \vec{v})$  — левая пара

# Произведения и их знаки

Отложим из одной точки векторы  $\vec{u} = (x_u, y_u)$  и  $\vec{v} = (x_v, y_v)$ .

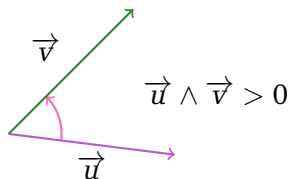
Что можно про них узнать?

Скалярное произведение:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v$ .

Косое произведение:  $\vec{u} \wedge \vec{v} = x_u y_v - y_u x_v$ .

В общем случае:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \alpha$
- Здесь  $\alpha$  — угол от  $\vec{u}$  до  $\vec{v}$  против часовой стрелки



$\vec{u} \wedge \vec{v} > 0$  — значит,  $(\vec{u}, \vec{v})$  — правая пара

Правая пара: первый вектор пары «справа» от второго.

Другой критерий: от первого ко второму ближе поворачивать, двигаясь против часовой стрелки.

# Содержание

- 1 Точки и прямые на плоскости
  - Точки
  - Прямые
  - Прямая и точка
  - Прямая по двум точкам
  - Точка по двум прямым
  - Запись через определители
- 2 Векторы на плоскости
  - Векторы
  - Скалярное произведение
  - Косое произведение
  - Произведения и их знаки
- 3 Задачи
  - Точка и отрезок
  - Точка и луч
  - Порядок вершин треугольника
  - Выпуклость
  - Два отрезка
  - Внутренность
  - Площадь
- 4 Выпуклая оболочка
  - Задача
  - Подготовка
  - Алгоритм Джарвиса
  - Алгоритм Грэхема

# Точка и отрезок

Даны отрезок  $AB$  и точка  $C$ .  
Лежит ли точка на отрезке?

# Точка и отрезок

Даны отрезок  $AB$  и точка  $C$ .

Лежит ли точка на отрезке?

Вырожденный случай:  $A = B$ . Проверим тогда, что  $A = C$ .

# Точка и отрезок

Даны отрезок  $AB$  и точка  $C$ .

Лежит ли точка на отрезке?

Вырожденный случай:  $A = B$ . Проверим тогда, что  $A = C$ .

Невырожденный случай:

1. Проверим, что  $C$  лежит на прямой  $AB$ .

- Можно построить прямую по двум точкам, а потом подставить  $C$  в уравнение прямой.

# Точка и отрезок

Даны отрезок  $AB$  и точка  $C$ .

Лежит ли точка на отрезке?

Вырожденный случай:  $A = B$ . Проверим тогда, что  $A = C$ .

Невырожденный случай:

1. Проверим, что  $C$  лежит на прямой  $AB$ .

- Можно построить прямую по двум точкам, а потом подставить  $C$  в уравнение прямой.
- Можно проверить, что  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 0$ .
- На самом деле это одна и та же проверка.

# Точка и отрезок

Даны отрезок  $AB$  и точка  $C$ .

Лежит ли точка на отрезке?

Вырожденный случай:  $A = B$ . Проверим тогда, что  $A = C$ .

Невырожденный случай:

1. Проверим, что  $C$  лежит на прямой  $AB$ .

- Можно построить прямую по двум точкам, а потом подставить  $C$  в уравнение прямой.
- Можно проверить, что  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 0$ .
- На самом деле это одна и та же проверка.

2. Проверим, что  $C$  лежит между  $A$  и  $B$ .

Условие:  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \leq 0$ .

При равенстве точка  $C$  совпадает с концом отрезка.

# Точка и отрезок

Даны отрезок  $AB$  и точка  $C$ .

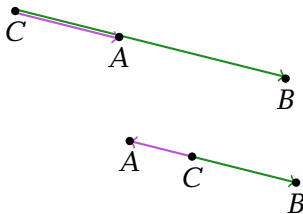
Лежит ли точка на отрезке?

Вырожденный случай:  $A = B$ . Проверим тогда, что  $A = C$ .

Невырожденный случай:

1. Проверим, что  $C$  лежит на прямой  $AB$ .

2. Проверим, что  $C$  лежит между  $A$  и  $B$ .



$$\begin{aligned}\vec{AB} \wedge \vec{AC} &= 0 \\ \vec{CA} \cdot \vec{CB} &> 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{AB} \wedge \vec{AC} &= 0 \\ \vec{CA} \cdot \vec{CB} &\leq 0\end{aligned}$$

# Точка и луч

Даны луч  $AB$  и точка  $C$ .  
Лежит ли точка на луче?

# Точка и луч

Даны луч  $AB$  и точка  $C$ .

Лежит ли точка на луче?

1. Проверим, что  $C$  лежит на прямой  $AB$ .

# Точка и луч

Даны луч  $AB$  и точка  $C$ .

Лежит ли точка на луче?

1. Проверим, что  $C$  лежит на прямой  $AB$ .

2. Проверим, что  $C$  лежит с той же стороны от  $A$ , что и  $B$ .

Условие:  $\vec{AC} \cdot \vec{AB} \geq 0$ .

При равенстве точка  $C$  совпадает с началом луча.

# Точка и луч

Даны луч  $AB$  и точка  $C$ .

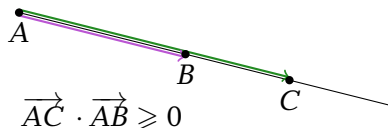
Лежит ли точка на луче?

1. Проверим, что  $C$  лежит на прямой  $AB$ .

2. Проверим, что  $C$  лежит с той же стороны от  $A$ , что и  $B$ .

Условие:  $\vec{AC} \cdot \vec{AB} \geq 0$ .

При равенстве точка  $C$  совпадает с началом луча.



## Порядок вершин треугольника

Даны три вершины треугольника:  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

Верно ли, что они перечислены против часовой стрелки?

## Порядок вершин треугольника

Даны три вершины треугольника:  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

Верно ли, что они перечислены против часовой стрелки?

Векторы  $\vec{AB}$  и  $\vec{BC}$  образуют правую пару

$\Leftrightarrow$

косое произведение  $\vec{AB} \wedge \vec{BC} > 0$

$\Leftrightarrow$

$A$ ,  $B$ ,  $C$  перечислены против часовой стрелки.

# Выпуклость

Даны вершины многоугольника  $A_1, A_2, \dots, A_n$  в порядке обхода (либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки).

Верно ли, что многоугольник выпуклый?

# Выпуклость

Даны вершины многоугольника  $A_1, A_2, \dots, A_n$  в порядке обхода (либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки).

Верно ли, что многоугольник выпуклый?

Для каждой вершины  $A_i$  посмотрим на знак косога произведения  $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$  и  $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ ; считаем, что номера точек эквивалентны по модулю  $n$ , то есть  $A_0 = A_n, A_1 = A_{n+1}, \dots$

# Выпуклость

Даны вершины многоугольника  $A_1, A_2, \dots, A_n$  в порядке обхода (либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки). Верно ли, что многоугольник выпуклый?

Для каждой вершины  $A_i$  посмотрим на знак косого произведения  $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$  и  $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ ; считаем, что номера точек эквивалентны по модулю  $n$ , то есть  $A_0 = A_n, A_1 = A_{n+1}, \dots$

- Если все косые произведения  $\geq 0$ , в каждой вершине мы поворачиваем против часовой стрелки, и многоугольник выпуклый.
- Если все косые произведения  $\leq 0$ , в каждой вершине мы поворачиваем по часовой стрелке, и многоугольник выпуклый.
- Если есть два косых произведения с разными знаками, многоугольник не выпуклый.

## Два отрезка

Даны два отрезка:  $AB$  и  $CD$ . Есть ли у них общие точки?

## Два отрезка

Даны два отрезка:  $AB$  и  $CD$ . Есть ли у них общие точки?

- Проверим пересечение ограничивающих прямоугольников
- Например, у первого отрезка углы ограничивающего прямоугольника такие:  $(\min(x_A, x_B), \min(y_A, y_B))$  и  $(\max(x_A, x_B), \max(y_A, y_B))$
- Построим две прямые
- Вырожденный случай: прямые совпадают или параллельны

## Два отрезка

Даны два отрезка:  $AB$  и  $CD$ . Есть ли у них общие точки?

- Проверим пересечение ограничивающих прямоугольников
- Например, у первого отрезка углы ограничивающего прямоугольника такие:  $(\min(x_A, x_B), \min(y_A, y_B))$  и  $(\max(x_A, x_B), \max(y_A, y_B))$
- Построим две прямые
- Вырожденный случай: прямые совпадают или параллельны
- Проверим, что прямая  $AB$  пересекает отрезок  $CD$ :
- Иными словами,  $C$  и  $D$  лежат по разные стороны от прямой  $AB$

## Два отрезка

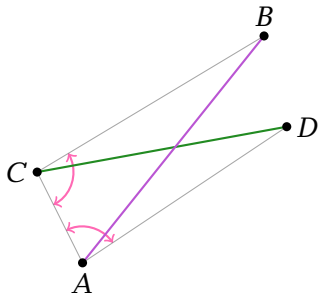
Даны два отрезка:  $AB$  и  $CD$ . Есть ли у них общие точки?

- Проверим пересечение ограничивающих прямоугольников
- Например, у первого отрезка углы ограничивающего прямоугольника такие:  $(\min(x_A, x_B), \min(y_A, y_B))$  и  $(\max(x_A, x_B), \max(y_A, y_B))$
- Построим две прямые
- Вырожденный случай: прямые совпадают или параллельны
- Проверим, что прямая  $AB$  пересекает отрезок  $CD$ :
- Иными словами,  $C$  и  $D$  лежат по разные стороны от прямой  $AB$
- Проверка:  $(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AD}) \leq 0$
- Аналогично проверим, что прямая  $CD$  пересекает отрезок  $AB$

# Два отрезка

Даны два отрезка:  $AB$  и  $CD$ . Есть ли у них общие точки?

- Проверим, что прямая  $AB$  пересекает отрезок  $CD$ :
- Иными словами,  $C$  и  $D$  лежат по разные стороны от прямой  $AB$
- Проверка:  $(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AD}) \leq 0$
- Аналогично проверим, что прямая  $CD$  пересекает отрезок  $AB$



# Внутренность

Даны вершины многоугольника  $A_1, A_2, \dots, A_n$  в порядке обхода (либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки).  $A$  также точка  $P$ . Верно ли, что  $P$  внутри многоугольника?

# Внутренность

Даны вершины многоугольника  $A_1, A_2, \dots, A_n$  в порядке обхода (либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки).  $A$  также точка  $P$ . Верно ли, что  $P$  внутри многоугольника?

- Проведём из  $P$  луч
- Посчитаем, сколько раз он пересекает границу многоугольника: проверим  $n$  пересечений луча со стороной
- Чётное количество раз — точка снаружи
- Нечётное количество раз — точка внутри

# Внутренность

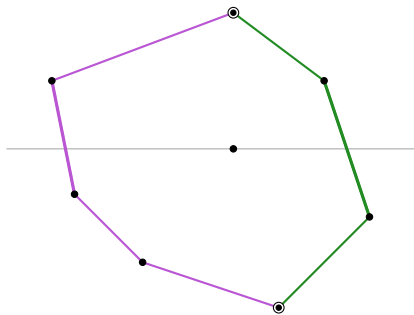
Даны вершины многоугольника  $A_1, A_2, \dots, A_n$  в порядке обхода (либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки).  $A$  также точка  $P$ . Верно ли, что  $P$  внутри многоугольника?

- Проведём из  $P$  луч
- Посчитаем, сколько раз он пересекает границу многоугольника: проверим  $n$  пересечений луча со стороной
- Чётное количество раз — точка снаружи
- Нечётное количество раз — точка внутри
- Удобно провести луч так, чтобы он не был параллелен сторонам и не проходил через вершины
- Например, если координаты целые от  $-1000$  до  $+1000$ , то подходит луч  $PQ$ , где  $Q = (x_P + 2001, y_P + 1)$

# Внутренность

Даны вершины многоугольника  $A_1, A_2, \dots, A_n$  в порядке обхода (либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки). А также точка  $P$ . Верно ли, что  $P$  внутри многоугольника?

- Если многоугольник выпуклый, можно проверить за  $O(\log n)$ :



# Площадь

Даны вершины многоугольника  $A_1, A_2, \dots, A_n$  в порядке обхода (либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки).

Найдите площадь этого многоугольника.

# Площадь

Даны вершины многоугольника  $A_1, A_2, \dots, A_n$  в порядке обхода (либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки).

Найдите площадь этого многоугольника.

- Посчитаем площадь трапеции со знаком под каждым вектором-стороной:  $(x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{i+1} + y_i)/2$
- Ответ — модуль суммы этих площадей. Почему?

# Площадь

Даны вершины многоугольника  $A_1, A_2, \dots, A_n$  в порядке обхода (либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки).

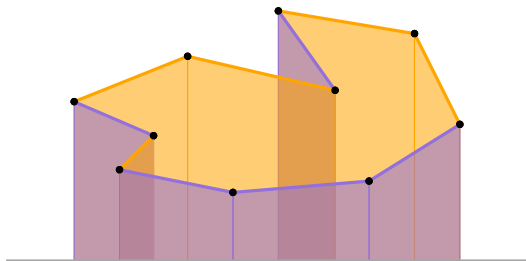
Найдите площадь этого многоугольника.

- Посчитаем площадь трапеции со знаком под каждым вектором-стороной:  $(x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{i+1} + y_i)/2$
- Ответ – модуль суммы этих площадей. Почему?
- Для наглядности подвинем многоугольник так, чтобы он был выше оси  $Ox$
- Пусть обход по часовой стрелке
- Прибавляем площади тех трапеций, где мы идём по стороне слева направо
- Отнимаем площади тех трапеций, где мы идём по стороне справа налево
- Прибавили многоугольник и то, что под ним, а отняли то, что под ним – осталась площадь многоугольника

# Площадь

Даны вершины многоугольника  $A_1, A_2, \dots, A_n$  в порядке обхода (либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки).

Найдите площадь этого многоугольника.



# Содержание

- 1 Точки и прямые на плоскости
  - Точки
  - Прямые
  - Прямая и точка
  - Прямая по двум точкам
  - Точка по двум прямым
  - Запись через определители
- 2 Векторы на плоскости
  - Векторы
  - Скалярное произведение
  - Косое произведение
  - Произведения и их знаки
- 3 Задачи
  - Точка и отрезок
  - Точка и луч
  - Порядок вершин треугольника
  - Выпуклость
  - Два отрезка
  - Внутренность
  - Площадь
- 4 Выпуклая оболочка
  - Задача
  - Подготовка
  - Алгоритм Джарвиса
  - Алгоритм Грэхема

# Задача

Дано множество точек на плоскости:  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .  
Найдите его выпуклую оболочку.

*Выпуклая оболочка* множества  $S$  — минимальное по включению выпуклое множество, содержащее все точки  $S$ .

Множество называется *выпуклым*, если для любых двух его точек  $P$  и  $Q$  любая точка на отрезке  $PQ$  также принадлежит множеству.

# Задача

Дано множество точек на плоскости:  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .  
Найдите его выпуклую оболочку.

*Выпуклая оболочка* множества  $S$  — минимальное по включению выпуклое множество, содержащее все точки  $S$ .

Множество называется *выпуклым*, если для любых двух его точек  $P$  и  $Q$  любая точка на отрезке  $PQ$  также принадлежит множеству.

Ответ — выпуклый многоугольник с вершинами в некоторых из заданных точек, содержащий все остальные заданные точки.

# Подготовка

**Утверждение 1:** выпуклая оболочка — многоугольник, вершины которого — все крайние точки заданного множества.

*Крайняя точка* множества  $S$  — это точка, через которую можно провести прямую так, чтобы все остальные точки  $S$  лежали по одну сторону от этой прямой.

# Подготовка

**Утверждение 1:** выпуклая оболочка — многоугольник, вершины которого — все крайние точки заданного множества.

*Крайняя точка* множества  $\mathcal{S}$  — это точка, через которую можно провести прямую так, чтобы все остальные точки  $\mathcal{S}$  лежали по одну сторону от этой прямой.

Зафиксируем крайнюю точку  $P_0$  и рассмотрим векторы из неё во все остальные точки множества. Определим отношение порядка на остальных точках:  $A_i < A_j$ , если  $\overrightarrow{P_0A_i} \wedge \overrightarrow{P_0A_j} > 0$ .

**Утверждение 2:** это действительно отношение порядка (свойства: антисимметричность, антирефлексивность, транзитивность).

# Подготовка

**Утверждение 1:** выпуклая оболочка — многоугольник, вершины которого — все крайние точки заданного множества.

*Крайняя точка* множества  $\mathcal{S}$  — это точка, через которую можно провести прямую так, чтобы все остальные точки  $\mathcal{S}$  лежали по одну сторону от этой прямой.

Зафиксируем крайнюю точку  $P_0$  и рассмотрим векторы из неё во все остальные точки множества. Определим отношение порядка на остальных точках:  $A_i < A_j$ , если  $\overrightarrow{P_0A_i} \wedge \overrightarrow{P_0A_j} > 0$ .

**Утверждение 2:** это действительно отношение порядка (свойства: антисимметричность, антирефлексивность, транзитивность).

Геометрический смысл: это сортировка по полярному углу, если  $P_0$  объявить началом координат. В частности, минимальный элемент — «самый правый»: если  $A_k$  меньше всех других  $A_j$ , то  $A_k$  образует правую пару с любым  $A_j$ .

# Алгоритм Джарвиса

- 1 Начнём с  $P_0$ , любой крайней точки множества: например, с минимальной как пара  $(x, y)$
- 2 Присвоим  $P \leftarrow P_0$
- 3 Добавим  $P$  в ответ
- 4 Построим векторы из  $P$  во все оставшиеся точки и выберем «самую правую» из них,  $R$  (а при равенстве — наиболее удалённую)
- 5 Если  $R = P_0$ , закончим работу, иначе присвоим  $P \leftarrow R$  и перейдём к шагу 3

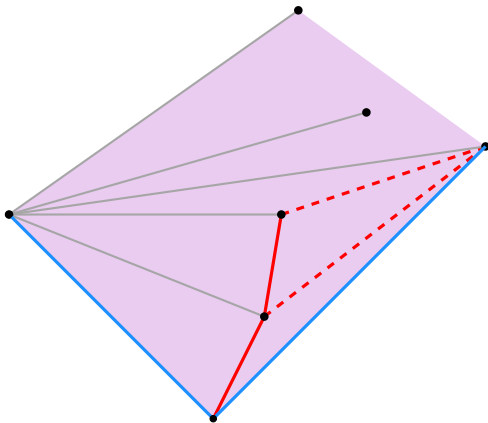
Алгоритм работает за  $O(nk)$ , где  $k$  — количество вершин в выпуклой оболочке.

# Алгоритм Грэхема

- 1 Начнём с  $P_0$ , любой крайней точки множества: например, с минимальной как пара  $(x, y)$
- 2 Отсортируем все оставшиеся точки по углу, считая  $P_0$  началом координат (при равенстве — по *возрастанию* расстояния до  $P_0$ )
- 3 Заведём стек  $S_1, S_2, \dots, S_k$ , изначально добавим туда  $P_0$
- 4 Будем рассматривать точки  $A_i$  в порядке сортировки
- 5 Для каждой точки  $A_i$ :
  - 6 Пока  $k \geq 2$ , будем рассматривать векторы  $S_{k-1}S_k$  и  $S_kA_i$
  - 7 Если они не образуют правую двойку, удалим  $S_k$  из стека и перейдём опять к шагу 6
  - 8 Добавим  $A_i$  в стек и перейдём к следующей точке в шаге 5

Алгоритм работает за  $O(n \log n)$ .

# Алгоритм Грэхема



# Вопросы?

# Вопросы?