Вычислительная геометрия

Никита Гаевой (102)
Иван Казменко (101, 103)
Владислав Макаров (104)
Семён Петров (106)
Лиана Хазалия (105)

Санкт-Петербургский Государственный Университет

Четверг, 11 ноября 2021 года

Содержание

Содержание

Точки

Как задать точку на плоскости?

Точки

Как задать точку на плоскости?
Две координаты: (x, y).

Точки

Как задать точку на плоскости?
Две координаты: (x, y).
Можно хранить отдельно две переменные `x` и `y`.

Точки

Как задать точку на плоскости?
Две координаты: (x, y).
Можно хранить в `pair <double, double>`.

Точки

Как задать точку на плоскости?
Две координаты: (x, y).

```cpp
#include <iostream>
#include <vector>
using namespace std;

struct Point {
    double x, y;
};

int main () {
    int n;
    cin >> n;
    vector <Point> p (n);
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        cin >> p[i].x >> p[i].y;
    }
    return 0;
}
```

Точки

```
#include <iostream>
#include <vector>
using namespace std;
struct Point {
    double x, y;
    Point () {x = y = 0;}
    Point (double x_, double y_) : x (x_), y (y_) {}
    Point operator + (Point const & other) const
    {return Point (x + other.x, y + other.y);}
    Point operator * (double c) const
    {return Point (x * c, y * c);}
};
int main () {
    int n;
    cin >> n;
    vector <Point> p (n);  auto center = Point (0, 0);
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        cin >> p[i].x >> p[i].y;  center = center + p[i];
    }
    center = center * (1.0 / n);
    cout << center.x << " " << center.y << endl;
    return 0;
}
```

Точки

```
#include <complex>
#include <iostream>
#include <vector>
using namespace std;
using Point = complex <double>;
int main () {
    int n;
    cin >> n;
    vector <Point> p (n);
    auto center = Point (0, 0);
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        double x, y;
        cin >> x >> y;
        p[i].real (x);
        p[i].imag (y);
        center += p[i];
    }
    center /= n;
    cout << center.real () << " " << center.imag () << endl;
    return 0;
}
```

Прямые

Как задать прямую на плоскости?

Прямые

Как задать прямую на плоскости?

- Уравнение с угловым коэффициентом:
- $y = kx + b$
- $k = 0$ — горизонтальная прямая
- Отдельный случай: вертикальная прямая
- Если в задаче 4 прямые — то получится 16 случаев...
- Больше случаев — больше багов

Прямые

Как задать прямую на плоскости?

- Параметрическая система уравнений:
- $\begin{cases} x = x_0 + a \cdot t \\ y = y_0 + b \cdot t \end{cases}$
- $(a, b) \neq (0, 0)$
- $a = 0$ — вертикальная прямая
- $b = 0$ — горизонтальная прямая
- От домножения a и b на любое $k \neq 0$ прямая не меняется
- Удобно, когда прямая задана двумя точками

Прямые

Как задать прямую на плоскости?

- Однородное уравнение прямой:
- $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$
- $(a, b) \neq (0, 0)$
- $a = 0$ — горизонтальная прямая
- $b = 0$ — вертикальная прямая
- $c = 0$ — прямая проходит через начало координат
- От домножения a, b и c на любое $k \neq 0$ прямая не меняется
- Будем работать с такими уравнениями

Прямая и точка

Лежит ли заданная точка на заданной прямой?

Прямая и точка

Лежит ли заданная точка на заданной прямой?

- Точка: (x_0, y_0)
- Прямая: $ax + by + c = 0$
- Критерий: $ax_0 + by_0 + c = 0$

Прямая по двум точкам

Какая прямая проходит через две заданные точки?

Прямая по двум точкам

Какая прямая проходит через две заданные точки?

- Точки: (x_1, y_1) и (x_2, y_2)
- Прямая: $ax + by + c = 0$
- Критерий: $\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \end{cases}$
- Вычтем: $a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$
- Подберём множители: $\begin{cases} a = y_2 - y_1 \\ b = x_1 - x_2 \end{cases}$
- Теперь, чтобы вычислить c, подставим любую из двух точек: $c = -(ax_1 + by_1)$

Точка по двум прямым

В какой точке пересекаются две заданные прямые?

Точка по двум прямым

В какой точке пересекаются две заданные прямые?

- Прямые: $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$
- Домножим, чтобы сделать одно из слагаемых одинаковым

Точка по двум прямым

В какой точке пересекаются две заданные прямые?

- Прямые: $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$
- Домножим первую строку на a_2, а вторую на a_1:
- $\begin{cases} a_2 a_1 x + a_2 b_1 y + a_2 c_1 = 0 \\ a_1 a_2 x + a_1 b_2 y + a_1 c_2 = 0 \end{cases}$
- Вычтем: $(a_2 b_1 - a_1 b_2) y + (a_2 c_1 - a_1 c_2) = 0$
- Преобразуем: $(a_2 b_1 - a_1 b_2) y = -(a_2 c_1 - a_1 c_2)$
- Получим: $y = -\dfrac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2}$

Точка по двум прямым

В какой точке пересекаются две заданные прямые?

- Прямые: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$
- Домножим первую строку на b_2, а вторую на b_1:
- $\begin{cases} b_2a_1x + b_2b_1y + b_2c_1 = 0 \\ b_1a_2x + b_1b_2y + b_1c_2 = 0 \end{cases}$
- Вычтем: $(b_2a_1 - b_1a_2)x + (b_2c_1 - b_1c_2) = 0$
- Преобразуем: $(b_2a_1 - b_1a_2)x = -(b_2c_1 - b_1c_2)$
- Получим: $x = -\dfrac{b_2c_1 - b_1c_2}{b_2a_1 - b_1a_2}$

Точка по двум прямым

В какой точке пересекаются две заданные прямые?

- Прямые: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$
- Ответ: $x = -\dfrac{b_2c_1 - b_1c_2}{b_2a_1 - b_1a_2}$, $y = -\dfrac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2}$

Точка по двум прямым

В какой точке пересекаются две заданные прямые?

- Прямые: $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$
- Ответ: $x = +\dfrac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$, $y = -\dfrac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$
- Особые случаи:
- Оба числителя и знаменатель равны нулю: прямые совпадают
- Иначе, если знаменатель равен нулю: прямые параллельны

Запись через определители

В какой точке пересекаются две заданные прямые?

- Прямые: $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$
- Через определители матриц 2×2:
- $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$
- $X = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $Y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $Z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$
- $x = +\frac{X}{Z}$, $y = -\frac{Y}{Z}$

Запись через определители

В какой точке пересекаются две заданные прямые?

- Прямые: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$
- Через определитель матрицы 3×3:
  $\begin{vmatrix} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} = r(vz - wy) - s(uz - wx) + t(uy - vx)$
- $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (b_1c_2 - b_2c_1)\vec{i} - (a_1c_2 - a_2c_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$
- X, Y, Z — это коэффициенты при $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$
- $x = +\frac{X}{Z}$, $y = -\frac{Y}{Z}$

Содержание

Векторы

Как задать вектор на плоскости?

Векторы

Как задать вектор на плоскости?
Две координаты: (x, y). Так же, как точку.

Скалярное произведение

Отложим из одной точки векторы $\vec{u} = (x_u, y_u)$ и $\vec{v} = (x_v, y_v)$.
Что можно про них узнать?
Скалярное произведение: $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v$.

Скалярное произведение

Отложим из одной точки векторы $\vec{u} = (x_u, y_u)$ и $\vec{v} = (x_v, y_v)$.
Что можно про них узнать?
Скалярное произведение: $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v$.

- Если векторы сонаправлены, $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$
- Если векторы ортогональны, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- Если векторы единичной длины, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos\alpha$
- Здесь α — угол между $\vec{u}$ и $\vec{v}$

Косое произведение

Отложим из одной точки векторы $\vec{u} = (x_u, y_u)$ и $\vec{v} = (x_v, y_v)$.
Что можно про них узнать?
Косое произведение: $\vec{u} \wedge \vec{v} = x_u y_v - y_u x_v$.
Другие названия: псевдоскалярное, «векторное» (формально нет).

Через определитель: $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$.

Косое произведение

Отложим из одной точки векторы $\vec{u} = (x_u, y_u)$ и $\vec{v} = (x_v, y_v)$.
Что можно про них узнать?
Косое произведение: $\vec{u} \wedge \vec{v} = x_u y_v - y_u x_v$.
Другие названия: псевдоскалярное, «векторное» (формально нет).

Через определитель: $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$.

- Если векторы параллельны, $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$
- Если векторы ортогональны, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \pm|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$
- Если векторы единичной длины, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \sin\alpha$
- Здесь α — угол от $\vec{u}$ до $\vec{v}$ против часовой стрелки
- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ — ориентированная площадь параллелограмма на этих векторах

Произведения и их знаки

Отложим из одной точки векторы $\vec{u} = (x_u, y_u)$ и $\vec{v} = (x_v, y_v)$.
Что можно про них узнать?
Скалярное произведение: $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v$.
Косое произведение: $\vec{u} \wedge \vec{v} = x_u y_v - y_u x_v$.
В общем случае:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\alpha$
- Здесь α — угол от $\vec{u}$ до $\vec{v}$ против часовой стрелки

Произведения и их знаки

Отложим из одной точки векторы $\vec{u} = (x_u, y_u)$ и $\vec{v} = (x_v, y_v)$.
Что можно про них узнать?
Скалярное произведение: $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v$.
Косое произведение: $\vec{u} \wedge \vec{v} = x_u y_v - y_u x_v$.
В общем случае:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\alpha$
- Здесь α — угол от $\vec{u}$ до $\vec{v}$ против часовой стрелки

По углу:

$0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$:	$\vec{u} \cdot \vec{v} \geqslant 0$,	$\vec{u} \wedge \vec{v} \geqslant 0$
$\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant \pi$:	$\vec{u} \cdot \vec{v} \leqslant 0$,	$\vec{u} \wedge \vec{v} \geqslant 0$
$\pi \leqslant \alpha \leqslant 3\pi/2$:	$\vec{u} \cdot \vec{v} \leqslant 0$,	$\vec{u} \wedge \vec{v} \leqslant 0$
$3\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$:	$\vec{u} \cdot \vec{v} \geqslant 0$,	$\vec{u} \wedge \vec{v} \leqslant 0$

Произведения и их знаки

Отложим из одной точки векторы $\vec{u} = (x_u, y_u)$ и $\vec{v} = (x_v, y_v)$.
Что можно про них узнать?
Скалярное произведение: $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v$.
Косое произведение: $\vec{u} \wedge \vec{v} = x_u y_v - y_u x_v$.
В общем случае:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\alpha$
- Здесь α — угол от $\vec{u}$ до $\vec{v}$ против часовой стрелки

По углу:
$\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ — значит, угол между векторами острый
$\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ — значит, угол между векторами тупой
$\vec{u} \wedge \vec{v} > 0$ — значит, $(\vec{u}, \vec{v})$ — правая пара
$\vec{u} \wedge \vec{v} < 0$ — значит, $(\vec{u}, \vec{v})$ — левая пара

Произведения и их знаки

Отложим из одной точки векторы $\vec{u} = (x_u, y_u)$ и $\vec{v} = (x_v, y_v)$.
Что можно про них узнать?
Скалярное произведение: $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v$.
Косое произведение: $\vec{u} \wedge \vec{v} = x_u y_v - y_u x_v$.
В общем случае:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \alpha$
- Здесь α — угол от $\vec{u}$ до $\vec{v}$ против часовой стрелки

$\vec{u} \wedge \vec{v} > 0$ — значит, $(\vec{u}, \vec{v})$ — правая пара
Правая пара: первый вектор пары «справа» от второго.
Другой критерий: от первого ко второму ближе поворачивать, двигаясь против часовой стрелки.

Содержание

Точка и отрезок

Даны отрезок AB и точка C.
Лежит ли точка на отрезке?

Точка и отрезок

Даны отрезок AB и точка C.
Лежит ли точка на отрезке?

Вырожденный случай: $A = B$. Проверим тогда, что $A = C$.

Точка и отрезок

Даны отрезок AB и точка C.
Лежит ли точка на отрезке?

Вырожденный случай: $A = B$. Проверим тогда, что $A = C$.

Невырожденный случай:
1. Проверим, что C лежит на прямой AB.

- Можно построить прямую по двум точкам, а потом подставить C в уравнение прямой.

Точка и отрезок

Даны отрезок AB и точка C.
Лежит ли точка на отрезке?

Вырожденный случай: $A = B$. Проверим тогда, что $A = C$.

Невырожденный случай:
1. Проверим, что C лежит на прямой AB.

- Можно построить прямую по двум точкам, а потом подставить C в уравнение прямой.
- Можно проверить, что $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 0$.
- На самом деле это одна и та же проверка.

Точка и отрезок

Даны отрезок AB и точка C.
Лежит ли точка на отрезке?

Вырожденный случай: $A = B$. Проверим тогда, что $A = C$.

Невырожденный случай:
1. Проверим, что C лежит на прямой AB.

- Можно построить прямую по двум точкам, а потом подставить C в уравнение прямой.
- Можно проверить, что $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 0$.
- На самом деле это одна и та же проверка.

2. Проверим, что C лежит между A и B.
Условие: $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \leqslant 0$.
При равенстве точка C совпадает с концом отрезка.

Точка и луч

Даны луч AB и точка C.
Лежит ли точка на луче?

Точка и луч

Даны луч AB и точка C.
Лежит ли точка на луче?

1. Проверим, что C лежит на прямой AB.

Точка и луч

Даны луч AB и точка C.
Лежит ли точка на луче?

1. Проверим, что C лежит на прямой AB.
2. Проверим, что C лежит с той же стороны от A, что и B.

Условие: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \geqslant 0$.
При равенстве точка C совпадает с началом луча.

Порядок вершин треугольника

Даны три вершины треугольника: A, B и C.
Верно ли, что они перечислены против часовой стрелки?

Порядок вершин треугольника

Даны три вершины треугольника: A, B и C.
Верно ли, что они перечислены против часовой стрелки?

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ образуют правую пару
$\Leftrightarrow$
косое произведение $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} > 0$
$\Leftrightarrow$
A, B, C перечислены против часовой стрелки.

Выпуклость

Даны вершины многоугольника A_1, A_2, ..., A_n в порядке обхода (либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки). Верно ли, что многоугольник выпуклый?

Выпуклость

Даны вершины многоугольника A_1, A_2, $\ldots$, A_n в порядке обхода (либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки). Верно ли, что многоугольник выпуклый?

Для каждой вершины A_i посмотрим на знак косого произведения $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ и $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$; считаем, что номера точек эквивалентны по модулю n, то есть $A_0 = A_n$, $A_1 = A_{n+1}$, ...

Выпуклость

Даны вершины многоугольника A_1, A_2, …, A_n в порядке обхода (либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки). Верно ли, что многоугольник выпуклый?

Для каждой вершины A_i посмотрим на знак косого произведения $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ и $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$; считаем, что номера точек эквивалентны по модулю n, то есть $A_0 = A_n$, $A_1 = A_{n+1}$, …

- Если все косые произведения $\geqslant 0$, в каждой вершине мы поворачиваем против часовой стрелки, и многоугольник выпуклый.
- Если все косые произведения $\leqslant 0$, в каждой вершине мы поворачиваем по часовой стрелке, и многоугольник выпуклый.
- Если есть два косых произведения с разными знаками, многоугольник не выпуклый.

Два отрезка

Даны два отрезка: AB и CD. Есть ли у них общие точки?

Два отрезка

Даны два отрезка: AB и CD. Есть ли у них общие точки?

- Проверим пересечение ограничивающих прямоугольников
- Например, у первого отрезка углы ограничивающего прямоугольника такие: $(\min(x_A, x_B), \min(y_A, y_B))$ и $(\max(x_A, x_B), \max(y_A, y_B))$
- Построим две прямые
- Вырожденный случай: прямые совпадают или параллельны

Два отрезка

Даны два отрезка: AB и CD. Есть ли у них общие точки?

- Проверим пересечение ограничивающих прямоугольников
- Например, у первого отрезка углы ограничивающего прямоугольника такие: $(\min(x_A, x_B), \min(y_A, y_B))$ и $(\max(x_A, x_B), \max(y_A, y_B))$
- Построим две прямые
- Вырожденный случай: прямые совпадают или параллельны
- Проверим, что прямая AB пересекает отрезок CD:
- Иными словами, C и D лежат по разные стороны от прямой AB

Два отрезка

Даны два отрезка: AB и CD. Есть ли у них общие точки?

- Проверим пересечение ограничивающих прямоугольников
- Например, у первого отрезка углы ограничивающего прямоугольника такие: $(\min(x_A, x_B), \min(y_A, y_B))$ и $(\max(x_A, x_B), \max(y_A, y_B))$
- Построим две прямые
- Вырожденный случай: прямые совпадают или параллельны
- Проверим, что прямая AB пересекает отрезок CD:
- Иными словами, C и D лежат по разные стороны от прямой AB
- Проверка: $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}) \leqslant 0$
- Аналогично проверим, что прямая CD пересекает отрезок AB

Внутренность

Даны вершины многоугольника A_1, A_2, …, A_n в порядке обхода (либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки). А также точка P. Верно ли, что P внутри многоугольника?

Внутренность

Даны вершины многоугольника A_1, A_2, …, A_n в порядке обхода (либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки). А также точка P. Верно ли, что P внутри многоугольника?

- Проведём из P луч
- Посчитаем, сколько раз он пересекает границу многоугольника: проверим n пересечений луча со стороной
- Чётное количество раз — точка снаружи
- Нечётное количество раз — точка внутри

Внутренность

Даны вершины многоугольника A_1, A_2, …, A_n в порядке обхода (либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки). А также точка P. Верно ли, что P внутри многоугольника?

- Проведём из P луч
- Посчитаем, сколько раз он пересекает границу многоугольника: проверим n пересечений луча со стороной
- Чётное количество раз — точка снаружи
- Нечётное количество раз — точка внутри
- Удобно провести луч так, чтобы он не был параллелен сторонам и не проходил через вершины
- Например, если координаты целые от -1000 до $+1000$, то подходит луч PQ, где $Q = (x_P + 2001, y_P + 1)$

Площадь

Даны вершины многоугольника A_1, A_2, …, A_n в порядке обхода (либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки). Найдите площадь этого многоугольника.

Площадь

Даны вершины многоугольника A_1, A_2, …, A_n в порядке обхода (либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки). Найдите площадь этого многоугольника.

- Посчитаем площадь трапеции со знаком под каждым вектором-стороной: $(x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{i+1} + y_i)/2$
- Ответ — модуль суммы этих площадей. Почему?

Площадь

Даны вершины многоугольника A_1, A_2, ..., A_n в порядке обхода (либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки). Найдите площадь этого многоугольника.

- Посчитаем площадь трапеции со знаком под каждым вектором-стороной: $(x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{i+1} + y_i)/2$
- Ответ — модуль суммы этих площадей. Почему?
- Для наглядности подвинем многоугольник так, чтобы он был выше оси Ox
- Пусть обход по часовой стрелке
- Прибавляем площади тех трапеций, где мы идём по стороне слева направо
- Отнимаем площади тех трапеций, где мы идём по стороне справа налево
- Прибавили многоугольник и то, что под ним, а отняли то, что под ним — осталась площадь многоугольника

Содержание

Задача

Дано множество точек на плоскости: A_1, A_2, $\ldots$, A_n.
Найдите его выпуклую оболочку.

Выпуклая оболочка множества $\mathcal{S}$ — минимальное по включению выпуклое множество, содержащее все точки $\mathcal{S}$.
Множество называется *выпуклым*, если для любых двух его точек P и Q любая точка на отрезке PQ также принадлежит множеству.

Задача

Дано множество точек на плоскости: A_1, A_2, …, A_n.
Найдите его выпуклую оболочку.

Выпуклая оболочка множества $\mathcal{S}$ — минимальное по включению выпуклое множество, содержащее все точки $\mathcal{S}$.
Множество называется *выпуклым*, если для любых двух его точек P и Q любая точка на отрезке PQ также принадлежит множеству.

Ответ — выпуклый многоугольник с вершинами в некоторых из заданных точек, содержащий все остальные заданные точки.

Подготовка

Утверждение 1: выпуклая оболочка — многоугольник, вершины которого — все крайние точки заданного множества.

Крайняя точка множества $\mathcal{S}$ — это точка, через которую можно провести прямую так, чтобы все остальные точки $\mathcal{S}$ лежали по одну сторону от этой прямой.

Подготовка

Утверждение 1: выпуклая оболочка — многоугольник, вершины которого — все крайние точки заданного множества.
Крайняя точка множества $\mathcal{S}$ — это точка, через которую можно провести прямую так, чтобы все остальные точки $\mathcal{S}$ лежали по одну сторону от этой прямой.
Зафиксируем крайнюю точку P_0 и рассмотрим векторы из неё во все остальные точки множества. Определим отношение порядка на остальных точках: $A_i < A_j$, если $\overrightarrow{P_0A_i} \wedge \overrightarrow{P_0A_j} > 0$.
Утверждение 2: это действительно отношение порядка (свойства: антисимметричность, антирефлексивность, транзитивность).

Подготовка

Утверждение 1: выпуклая оболочка — многоугольник, вершины которого — все крайние точки заданного множества.
Крайняя точка множества $\mathcal{S}$ — это точка, через которую можно провести прямую так, чтобы все остальные точки $\mathcal{S}$ лежали по одну сторону от этой прямой.
Зафиксируем крайнюю точку P_0 и рассмотрим векторы из неё во все остальные точки множества. Определим отношение порядка на остальных точках: $A_i < A_j$, если $\overrightarrow{P_0A_i} \wedge \overrightarrow{P_0A_j} > 0$.
Утверждение 2: это действительно отношение порядка (свойства: антисимметричность, антирефлексивность, транзитивность).

Геометрический смысл: это сортировка по полярному углу, если P_0 объявить началом координат. В частности, минимальный элемент — «самый правый»: если A_k меньше всех других A_j, то A_k образует правую пару с любым A_j.

Алгоритм Джарвиса

1. Начнём с P_0, любой крайней точки множества: например, с минимальной как пара (x, y)
2. Присвоим $P \leftarrow P_0$
3. Добавим P в ответ
4. Построим векторы из P во все оставшиеся точки и выберем «самую правую» из них, R (а при равенстве — наиболее удалённую)
5. Если $R = P_0$, закончим работу, иначе присвоим $P \leftarrow R$ и перейдём к шагу 3

Алгоритм работает за $O(nk)$, где k — количество вершин в выпуклой оболочке.

Алгоритм Грэхема

1. Начнём с P_0, любой крайней точки множества: например, с минимальной как пара (x, y)
2. Отсортируем все оставшиеся точки по углу, считая P_0 началом координат (при равенстве — по *возрастанию* расстояния до P_0)
3. Заведём стек $S_1, S_2, \ldots, S_k$, изначально добавим туда P_0
4. Будем рассматривать точки A_i в порядке сортировки
5. Для каждой точки A_i:
6. Пока $k \geqslant 2$, будем рассматривать векторы $S_{k-1}S_k$ и S_kA_i
7. Если они не образуют правую двойку, удалим S_k из стека и перейдём опять к шагу 6
8. Добавим A_i в стек и перейдём к следующей точке в шаге 5

Алгоритм работает за $O(n \log n)$.

Вопросы?

Вопросы?