# Декартовы деревья

Гаевой, Казменко, Макаров

Санкт-Петербургский Государственный Университет

Четверг, 10 декабря 2020 года

# Содержание

# Содержание

# Деревья поиска

Декартово дерево — это разновидность сбалансированного двоичного дерева поиска.

# Деревья поиска

Декартово дерево — это разновидность сбалансированного двоичного дерева поиска.

- Дерево — связный граф без циклов.

# Деревья поиска

Декартово дерево — это разновидность сбалансированного двоичного дерева поиска.

- Дерево — связный граф без циклов.
- Двоичное дерево — корневое дерево, в котором у каждой вершины не более двух потомков — левый и правый.

# Деревья поиска

Декартово дерево — это разновидность сбалансированного двоичного дерева поиска.

- Дерево — связный граф без циклов.
- Двоичное дерево — корневое дерево, в котором у каждой вершины не более двух потомков — левый и правый.
- Дерево поиска — корневое дерево с числами в вершинах: число в вершине больше всех чисел в левом поддереве, но меньше всех чисел в правом поддереве.
  - При равенстве можно оказаться в любом поддереве.
  - Числа $\rightarrow$ любые объекты, на которых определён порядок.
  - Поиск: начать с корня, идти в правильное поддерево.

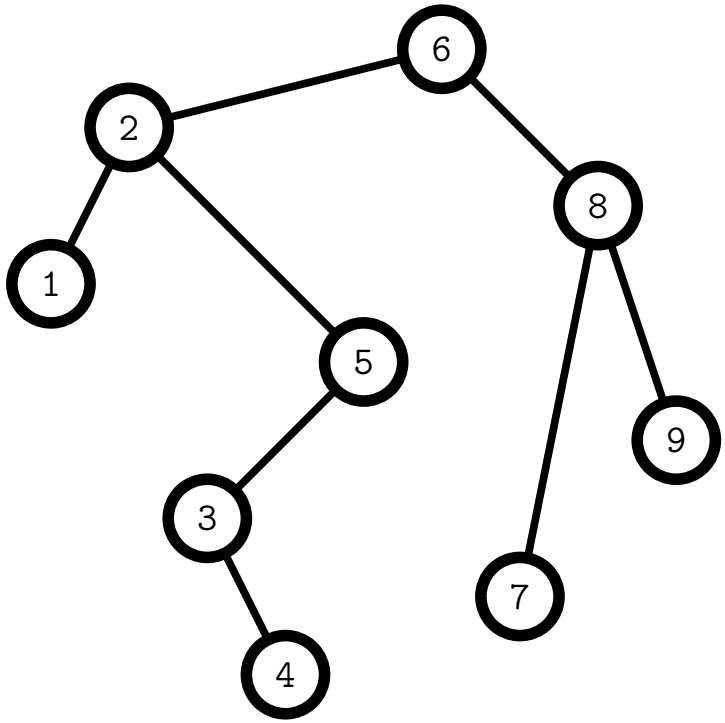
# Деревья поиска

Декартово дерево — это разновидность сбалансированного двоичного дерева поиска.

- Дерево — связный граф без циклов.
- Двоичное дерево — корневое дерево, в котором у каждой вершины не более двух потомков — левый и правый.
- Дерево поиска — корневое дерево с числами в вершинах: число в вершине больше всех чисел в левом поддереве, но меньше всех чисел в правом поддереве.
  - При равенстве можно оказаться в любом поддереве.
  - Числа $\rightarrow$ любые объекты, на которых определён порядок.
  - Поиск: начать с корня, идти в правильное поддерево.
- Сбалансированное дерево — корневое дерево, в котором максимальная глубина вершины *невелика*.
  - Глубина вершины — расстояние от неё до корня.
  - Время на поиск в худшем случае — глубина дерева.

# Пример

Пример:



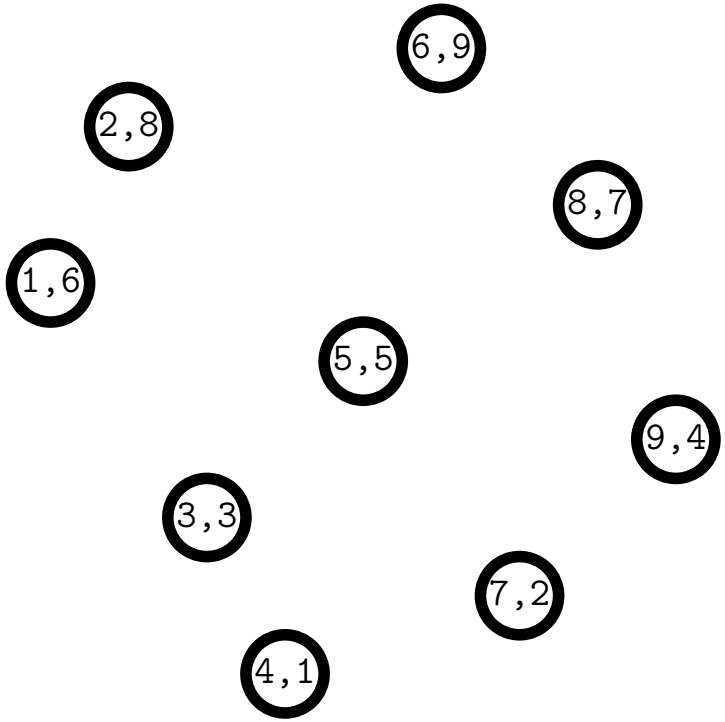
# Декартово дерево

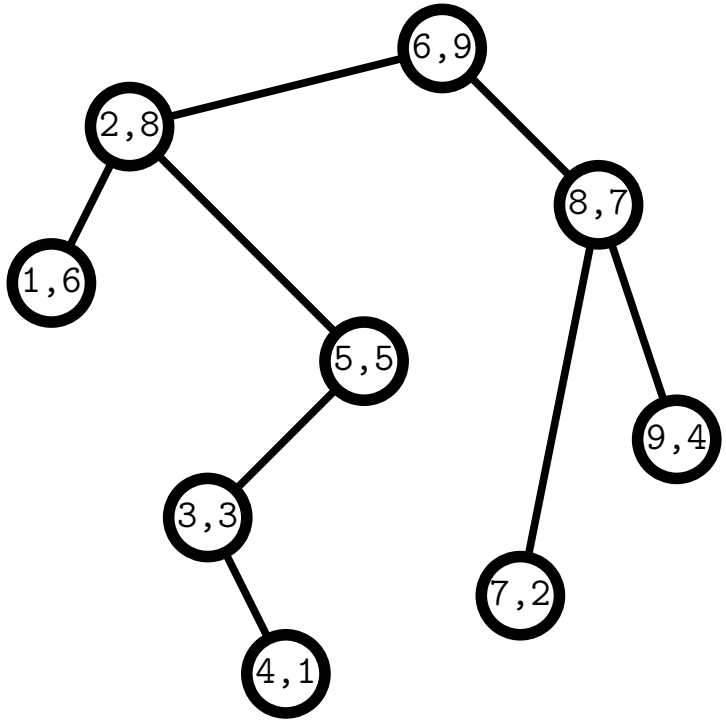
Декартово дерево — это дерево, в котором каждая вершина содержит пару чисел $(x, y)$:

- По координате $x$ это двоичное дерево поиска: число в вершине больше всех чисел в левом поддереве, но меньше всех чисел в правом поддереве.
- По координате $y$ это двоичная куча: число в вершине больше всех чисел в поддеревьях.

Удобно представлять вершины как точки $(x, y)$ на плоскости, в декартовой системе координат.

# Декартово дерево



# Декартово дерево

**Утверждение:** если все $x$ различны и все $y$ различны, существует единственное декартово дерево с такими вершинами.

# Декартово дерево

**Утверждение:** если все $x$ различны и все $y$ различны, существует единственное декартово дерево с такими вершинами.

- Докажем конструктивно: предъявим алгоритм построения.

# Декартово дерево

**Утверждение:** если все $x$ различны и все $y$ различны, существует единственное декартово дерево с такими вершинами.

- Докажем конструктивно: предъявим алгоритм построения.
- Корень дерева — это вершина с наибольшим $y$.
- Все точки слева от неё образуют левое поддерево, а все точки справа — правое поддерево.
- Переходим к двум поздадачам, в которых поддеревья строятся рекурсивно тем же алгоритмом.

# Выбор структуры

Почему на практике мы изучаем именно декартово дерево?

- коротко пишется
- мощное: умеет решать много интересных задач
- скорее всего, нет в стандартной библиотеке
  - C++: Policy-based data structures (GCC extension)?..

# Содержание

# Операции

Интерфейс двоичного дерева поиска:

- `insert (t, x)` — вставить элемент `x` в дерево `t`
- `erase (t, x)` — удалить элемент `x` из дерева `t`
- `find (t, x)` — найти элемент `x` в дереве `t` (или выяснить, что его нет)

# Операции

Интерфейс двоичного дерева поиска:

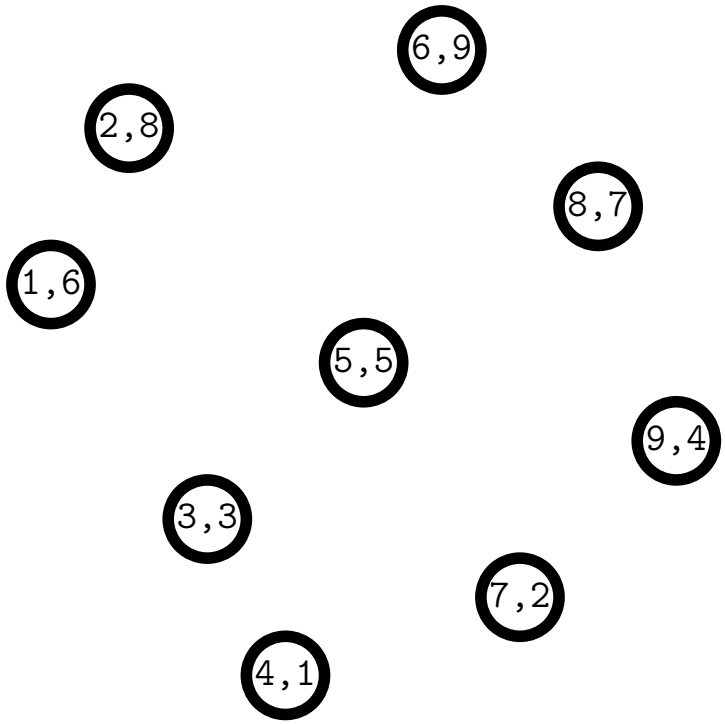
- `insert (t, x)` — вставить элемент `x` в дерево `t`
- `erase (t, x)` — удалить элемент `x` из дерева `t`
- `find (t, x)` — найти элемент `x` в дереве `t` (или выяснить, что его нет)

Базовые операции декартова дерева:

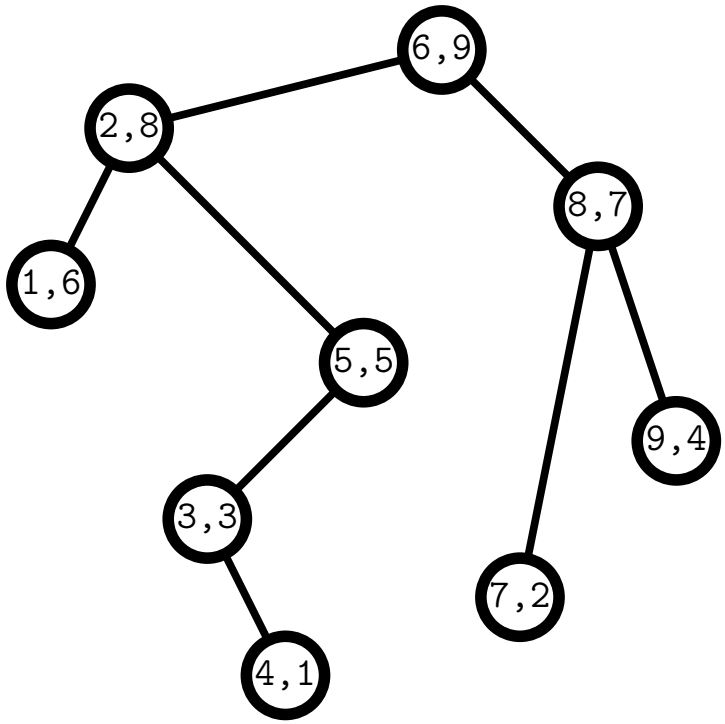
- `split (t, x)` — разбить декартово дерево на два, `l` и `r`: в одном все числа меньше `x`, в другом все остальные
- `merge (l, r)` — объединить два декартова дерева `l` и `r` в одно при условии, что любое число в `l` не больше любого числа в `r`

Эти операции — взаимно обратные.

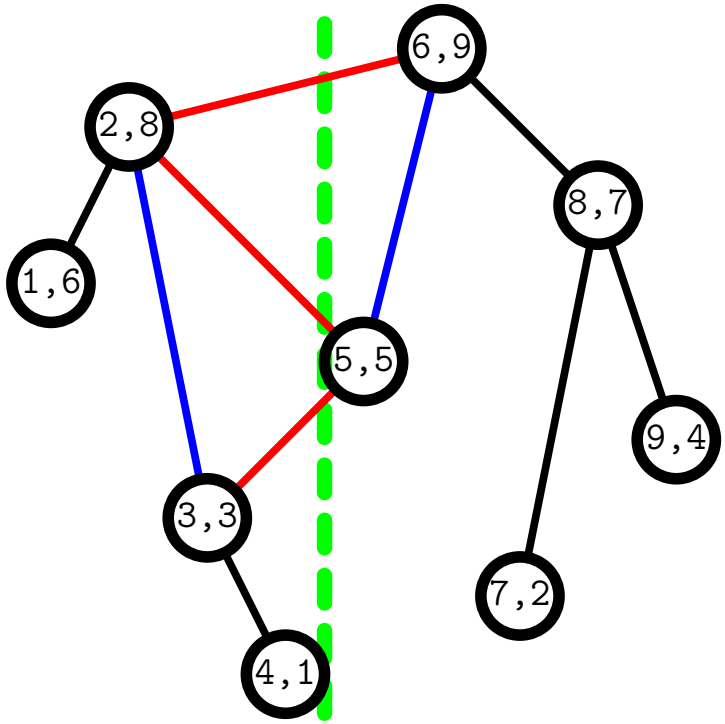
# Иллюстрации 1



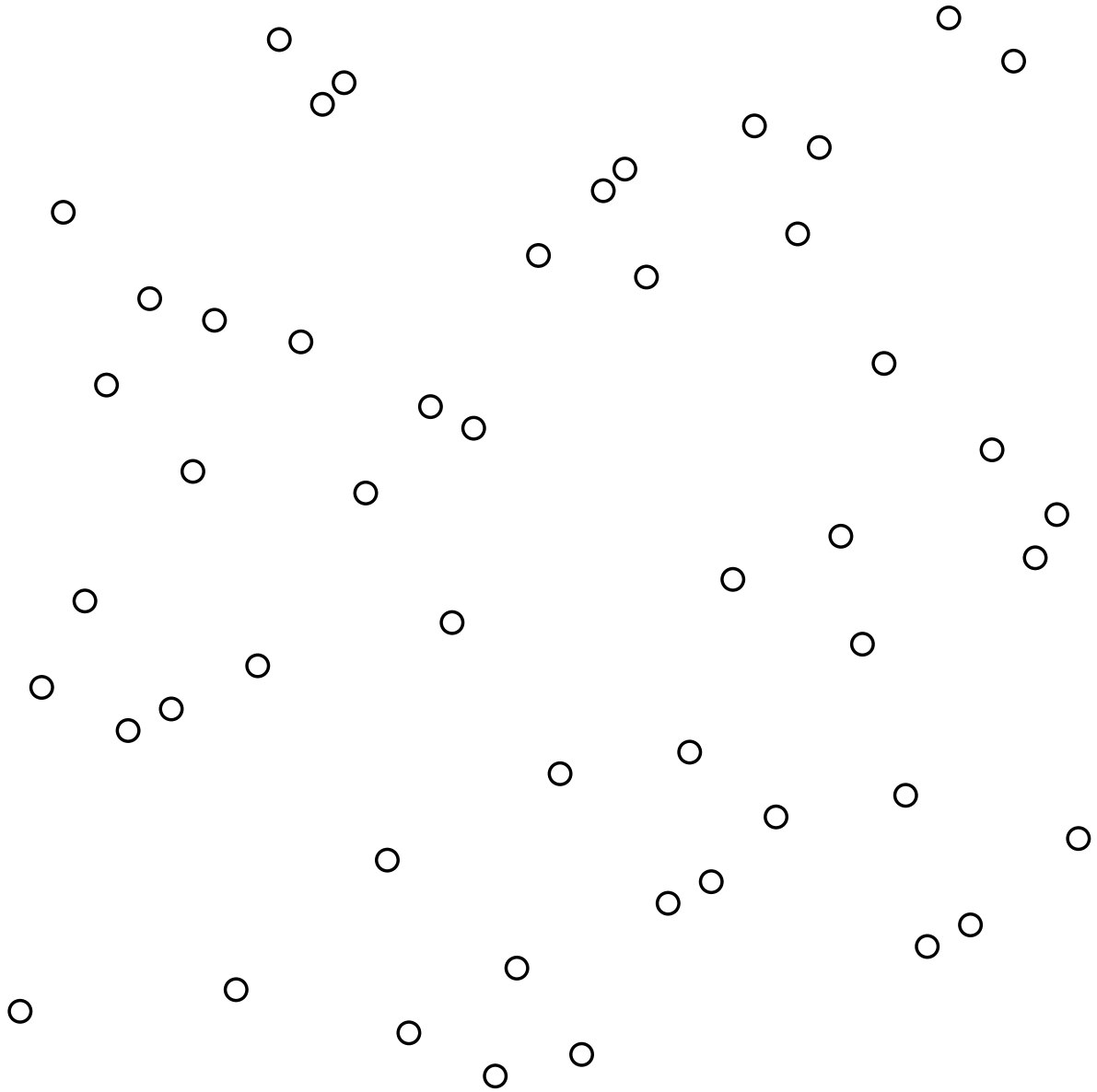
# Иллюстрации 1



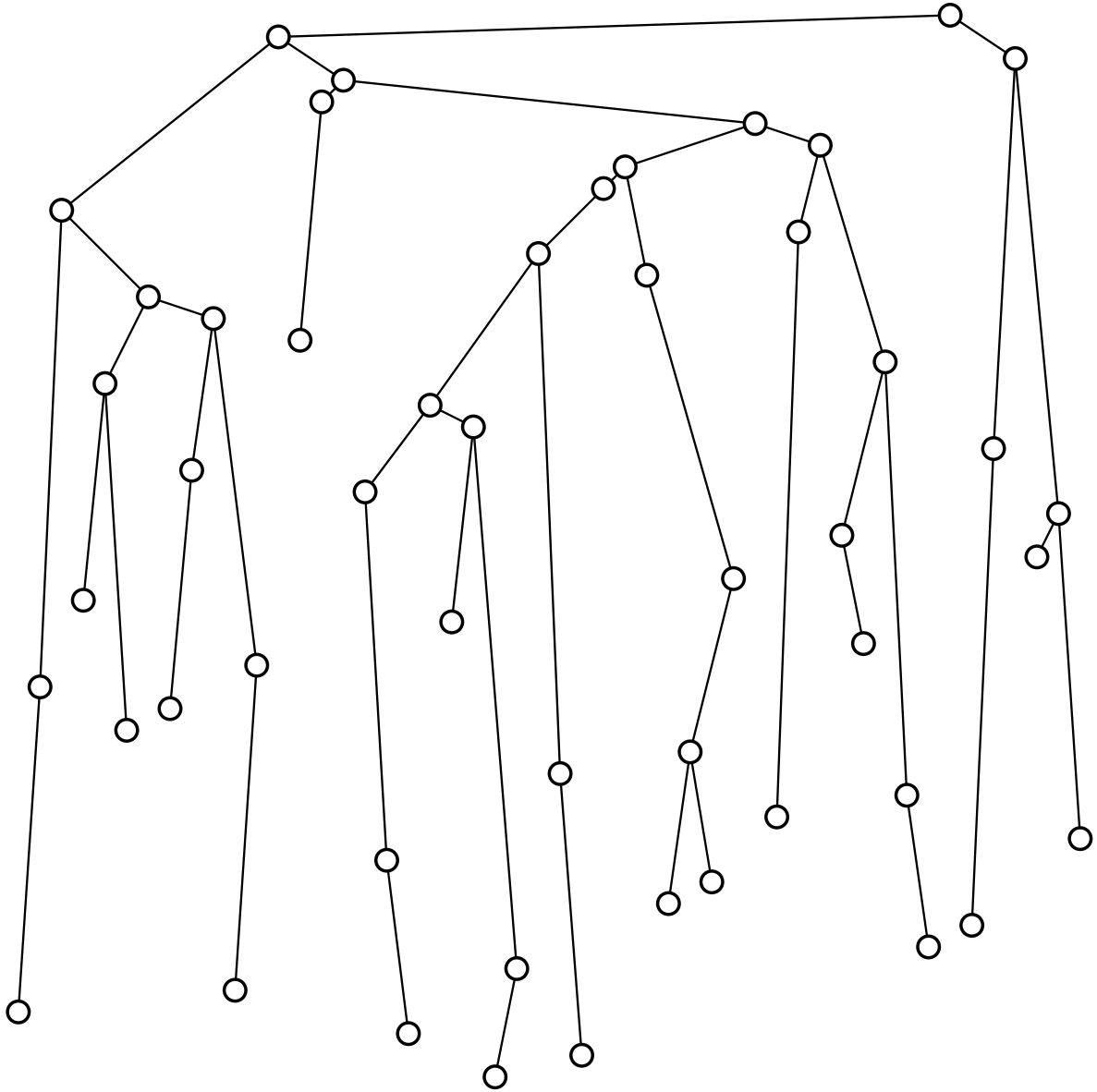
# Иллюстрации 1



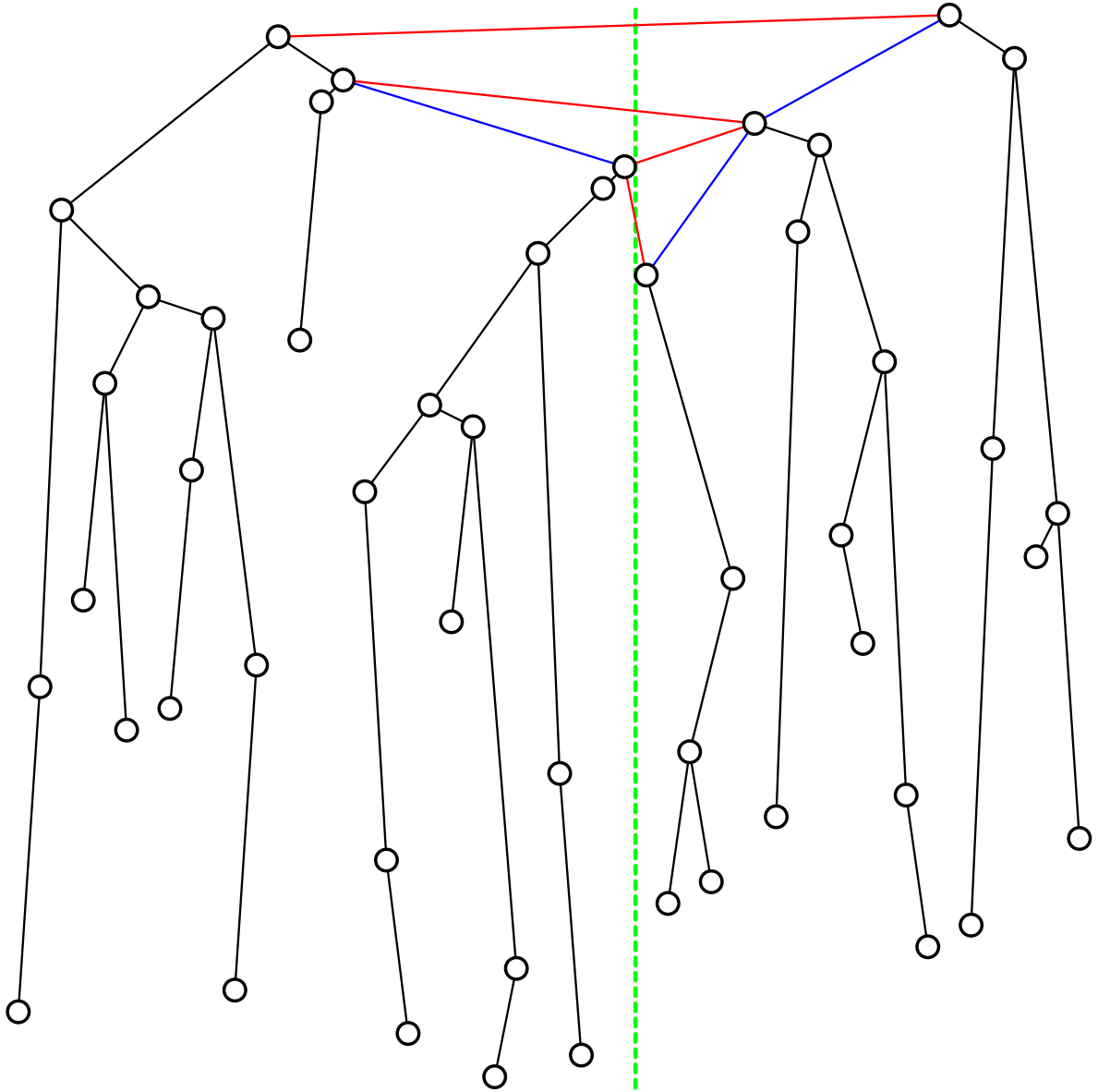
# Иллюстрации 2



# Иллюстрации 2



# Иллюстрации 2



# Операция split

Научимся делать split дерева t по ключу xs.

- Если t пустое, то l и r пустые.
- Если t.x $<$ xs, нужно разделить t.left по ключу xs.
  - Пусть мы получили ll и lr. Ответ:
  - l = ll,
  - r = t, у которого вместо t.left привешено дерево lr.
- Если же t.x $\geqslant$ xs, нужно разделить t.right по ключу xs.
  - Пусть мы получили rl и rr. Ответ:
  - l = t, у которого вместо t.right привешено дерево rl,
  - r = rr.

# Операция merge

Научимся делать merge деревьев l и r.

- Если l пустое, то ответ это r.
- Если r пустое, то ответ это l.
- Если l.y > r.y, нужно l сделать корнем.
  - Поддерево l.left останется как есть.
  - Вместо поддерева l.right будет merge деревьев l.right и r.
- Если же l.y $\leqslant$ r.y, нужно r сделать корнем.
  - Вместо поддерева r.left будет merge деревьев l и r.left.
  - Поддерево r.right останется как есть.

# Дальнейшее занятие

План дальнейшего занятия — написать вместе программу, реализующую декартово дерево, а дальше изменять её, чтобы решить несколько примеров — сколько успеем. Например:

1. Множество: добавление, поиск, удаление.
2. +Порядковая статистика: поиск $k$-го элемента в порядке возрастания.
3. Массив со следующей операцией: даны $\texttt{lo} < \texttt{me} < \texttt{hi}$, поменять местами отрезки $[\texttt{lo}, \texttt{me})$ и $[\texttt{me}, \texttt{hi})$.
4. +Максимум на отрезке $[\texttt{lo}, \texttt{hi})$.
5. +Переворачивание отрезка $[\texttt{lo}, \texttt{hi})$.
6. +Приписывание отрезка $[\texttt{lo}, \texttt{hi})$ в конец массива.

*Вероятно, до последнего примера дело не дойдёт...*

# Дополнительное чтение

Рекомендуемое дополнительное чтение — декартово дерево на Хабре (автор — Александр Полозов):

- `https://habr.com/ru/post/101818/`
- `https://habr.com/ru/post/102006/`
- `https://habr.com/ru/post/102364/`

# Вопросы?

Вопросы?